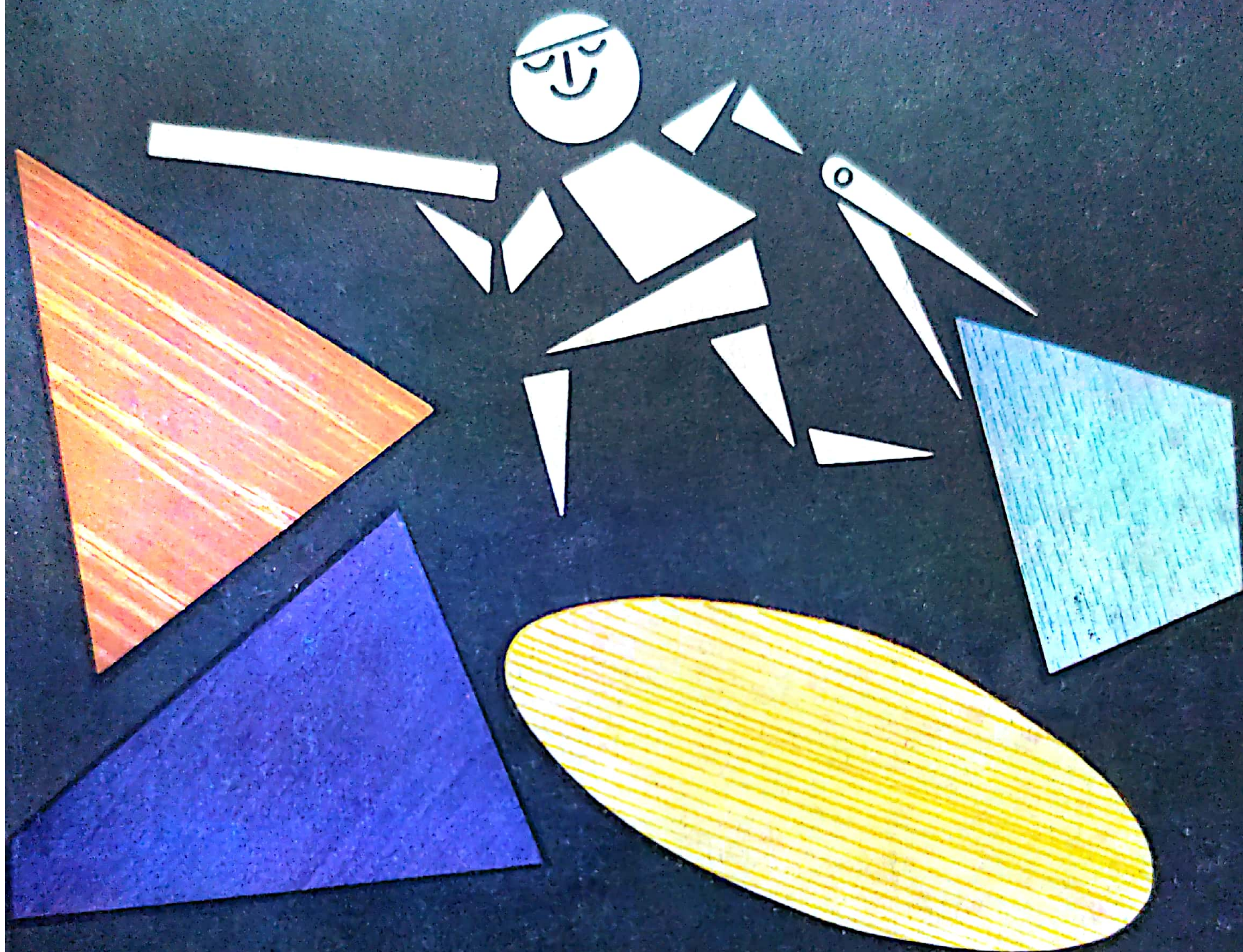
GH. MITROAICA



# DIN PERIPEŢIILE UNUI REZOLVATOR DE PROBLEME

EDITURA ALBATROS

GH. MITROAICA

# DIN PERIPEȚIILE UNUI REZOLVATOR DE PROBLEME

La mulți ani!

Isabela și Dan

septembrie 1987

GH. MITROAICA

# DIN PERIPEȚIILE UNUI REZOLVATOR DE PROBLEME

MICĂ CULEGERE
DE REZOLVĂRI CU... PROBLEME



EDITURA ALBATROS
BUCUREȘTI
1987



## *PROLOG*

### *CULEGERILE*

*Prea „banale“ multă vreme*
*Ca „probleme cu soluții“,*
*Au ajuns — prin evoluții —*
*La „soluții cu probleme“...*

# CUVÎNT NEAPĂRAT ÎNAINTE

*Probleme, probleme, probleme !*

*Culegeri de probleme peste tot ! De matematică, de fizică, de chimie... Multe, foarte multe, dar și foarte necesare !*

*Culegerea de față vine să se alăture suratelor mai mari pentru că se crede și ea utilă încercînd să găsească o nouă cale de a ajunge mai întîi la inima cititorului (eventual rezolvitorului, cum prin tradiție i se spune la Gazeta matematică) și apoi la mintea lui. Aproape am spus esențialul despre această carte care deși e tot culegere de probleme, se vrea și o culegere de altceva... Dar ce altceva ? Răspunsul va apărea mai limpede din enumerarea principalelor caracteristici ale problemelor „culese" :*

*1) Notez cu prima cifră semnificativă caracteristica pe care o consider cea mai originală : aceste probleme sînt redate exact în ordinea cronologică în care autorul s-a ocupat de ele, ca răspuns la solicitări întîmplătoare. Poate că uzez aici de un criteriu puțin bizar de „poziționare" a problemelor, poate că acesta este un mod de prezentare ce interesează pe eventuali „psihologi ai rezolvării de probleme" ... Vom vedea în ce măsură cititorul va „gusta" această originalitate.*

*2) Caracteristica desemnată cu întîia cifră pară este poate tot atît de neobișnuită ca prima. Ea constă în aceea că aproape fiecare problemă are un cadru „ceva mai mult decît aparte" în care a fost rezolvată, cadru pe care am încercat să-l descriu cît mai scurt și cuprinzător, dar și cît mai amuzant și sugestiv. Nutresc speranța că și acest adaos la „caseta" fiecărei probleme va prezenta oarecare interes pentru cititor, fie și numai sub formă de amuzament (dacă nu chiar ca un alt canal prin care se poate pătrunde în intimitatea captivantului proces de cercetare care este de fapt rezolvarea unei probleme de matematică sau fizică).*

*3) Problemele sînt de nivelul claselor IX—XI deși unele dintre ele se rezolvă folosind material teoretic din primii ani de geometrie. Cînd spun „primii ani de geometrie" nu înseamnă deloc că minimalizez gradul de dificultate al problemelor, fiind convins că acesta nu este determinat exhaustiv de către mijloacele de rezolvare. Într-adevăr, am întîlnit probleme care se rezolvau aplicînd teoreme de clasa a VI-a,*

*dar gradul lor de dificultate putea să dea insomnii și unor elevi de clasa a XI-a sau a XII-a. Poate că cititorul va descoperi astfel de probleme chiar în paginile acestei culegeri.*

*4) Problemele care populează această culegere nu sînt numai de matematică. Cîteva sînt de fizico-matematică (sau, dacă vreți, de matematico-fizică), iar alte cîteva de fizică, pe care autorul în calitatea lui de fizician le-a abordat cu bunăvoință ori de cîte ori s-au ivit (din păcate cele mai multe de care s-a ocupat cer cunoștințe de analiză matematică, deci nu corespund nivelului acestei culegeri).*

*5) Din cuprinsul unei asemenea „problematice“ culegeri nu puteau lipsi problemele propuse de către autor, atît cele publicate cît și cele „în premieră“, probleme avînd de asemenea istoria lor, una mai interesantă decît alta (cel puțin pentru autor...).*

*6) Cu vreo două-trei excepții, problemele rezolvate în această carte nu sînt dintre cele deosebit de grele.*

*7) Cam cu același număr de excepții nu sînt nici dintre cele mai ușoare.*

*8) Bună parte dintre ele pot constitui modele.*

*9) Cîteva dintre aceste „rezolvări cu probleme“ sînt legate de numele lui CRISTEA ION, matematician de excepție pe care timpul, încetînd să mai curgă pentru el la numai 27 de ani, l-a împiedicat să-și valorifice pe deplin extraordinarul său talent.*

*10) Atît conținutul problemelor cît și cadrul în care au fost rezolvate, ar putea îndreptăți, după speranța autorului, titlul acestei culegeri care se vrea cît de cît captivantă. ...*

*11) Oricare dintre aceste probleme poate avea soluții mult mai simple și mai elegante decît cele date de către autor, soluții pe care nu le poate da decît cititorul însuși. SUCCES !*

*Și cu aceasta sper că am rezolvat... problema prefeței.*

**Autorul**

# 1. VRABIA MÂLAI VISEAZĂ... SAU „ADEVĂRATA TEOREMĂ A BISECTOAREI"

Cine nu cunoaşte celebra teoremă a bisectoarei ? Nu este atît de celebră cît cea a lui Tales sau cea a lui Pitagora, dar este aproape tot atît de bine cunoscută. Îi reamintesc enunţul : într-un triunghi bisectoarea determină pe latura opusă unghiului „ei", segmente proporţionale cu laturile unghiului. Şi cine nu-şi aminteşte clasica demonstraţie a acestei teoreme prin ducerea unei paralele la bisectoarea împricinată, printr-un vîrf exterior ei, pînă întîlneşte prelungirea laturii opuse vîrfului ? De altfel este o teoremă cu aplicaţii la multe probleme şi are o expresie cît se poate de bine proporţionată...

Cu toate acestea teorema are un „mare" neajuns : lipseşte din expresia ei tocmai... bisectoarea. Or, în expresia teoremei medianei, de pildă, mediana are o prezenţă chiar la pătrat ! Şi-atunci cum rămîne cu numele de „teorema bisectoarei" ? Nu este el oare impropriu ?

Astfel gîndeam pe cînd eram în primii ani de liceu. Drept urmare mi-am pus la un moment dat problema să găsesc eu o „adevărată" teoremă a bisectoarei ignorînd-o pur şi simplu pe cea clasică. Nu ştiam ce surprize avea să-mi aducă această îndrăzneaţă abordare...

Din capul locului vreau să spun că pe-atunci nu recurgeam la „serviciile" lui Stewart, probabil din cauza aprehensiunii pe care dintotdeauna am avut-o pentru teoremele cu expresii „kilometrice". De aceea, pentru atingerea

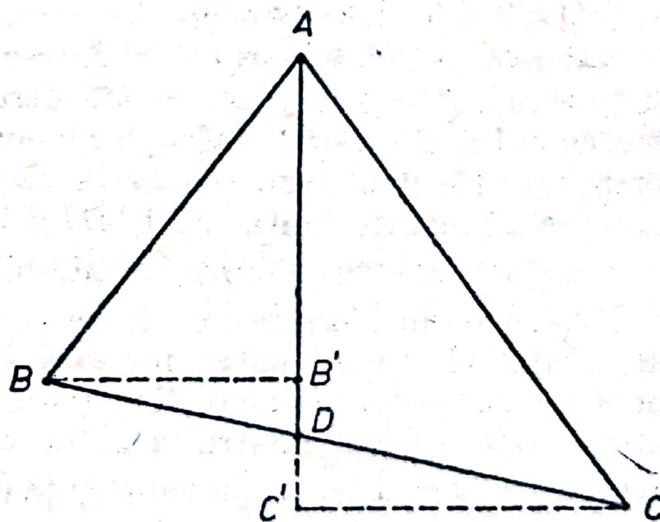



Fig. 1

scopului propus am căutat o construcție ajutătoare „inspirată". M-a ajutat la aceasta însuși triunghiul, cu „spațiul" său miraculos în care un punct, o linie, aruncate la întîmplare, fac să țîșnească la lumină zeci de relații ascunse.

În triunghiul $ABC$ (fig. 1) fie bisectoarea $AD$ cu $D \in (BC)$ și fie $B' = \mathrm{pr}_{AD} B$ și $C' = \mathrm{pr}_{AD} C$. „Mulțimile" de triunghiuri dreptunghice și asemenea care se formează astfel, permit tot felul de combinații. Eu le-am vizat pe acelea capabile să-mi aducă în prim plan pe $AD^2$ (ce vreți, obsesia teoremei medianei!) Din teorema lui Pitagora pentru triunghiul dreptunghic $AB'B$ rezultă:

$$(1) \qquad AB^2 = (AD - B'D)^2 + BB'^2 = \ldots = AD^2 - 2\,AD \cdot B'D + BD^2$$

În mod cu totul analog se ajunge la

$$(2) \qquad AC^2 = AD^2 + 2\,AD \cdot C'D + CD^2$$

iar din (1) și (2), modificîndu-le convenabil (se separă termeni care au pe $AD$ ca factor) și împărțindu-le membru cu membru se deduce

$$(3) \qquad \frac{B'D}{C'D} = \frac{BD}{CD} = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{AC^2 - AD^2 - CD^2}$$

unde am ținut seama de asemănarea triunghiurilor $BB'D$ și $CC'D$. Din (3), prin înmulțiri de mezi, extremi și reduceri de termeni, obținem prima surpriză de proporții ... fără proporții:

$$(4 \qquad AD^2 \cdot (BD + CD) = AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot CD - \\ - BD \cdot CD \cdot (BD + CD)$$

Unde dai și unde crapă!

Care va să zică, pornesc să găsesc o expresie pentru bisectoare și „descopăr" exact ceea ce mă ferisem din start să folosesc: teorema lui Stewart! Într-adevăr puteam considera că fără să vreau am făcut o demonstrație a acestei teoreme (nefăcînd deloc uz pînă atunci de faptul că $[AD]$ e bisectoare).

A fost pentru-o clipă un simplu popas... .

Surpriza următoare a venit neașteptat de repede. Mai departe de relația (4) nu se putea merge decît dacă făceam să apară și pentru primii doi termeni din membrul II al acestei relații, factorul $(BD + CD)$. Pentru aceasta am fost nevoit ca, pe baza aceleiași figuri 1, să „redescopăr" teorema clasică a bisectoarei — a doua surpriză. Deci, ținînd seama de asemănarea perechilor de triunghiuri $(AB'B, AC'C)$ și $(BB'D, CC'D)$, se obține:

(5) $$\frac{AB}{AC}=\frac{BB'}{CC'}=\frac{BD}{CD}$$

unde egalitatea dintre primul şi ultimul raport nu exprimă altceva decît „proporţionata" teoremă a bisectoarei cu ajutorul căreia relaţia (4) mi-a devenit, după atît de doritele simplificări,

(6) $$AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot DC$$

EVRICA! am strigat eu la vederea acestei relaţii, după care mi-am zis că „minunile lumii n-au fost numai şapte!". Era exact ce-mi doream: o expresie geometrică avînd toate drepturile de a fi proclamată „adevărata teoremă a bisectoarei" sau „teorema propriu-zisă a bisectoarei". Iată deci că şi bisectoarea putea să aibă o „prezenţă la pătrat" întocmai ca megieşa sa mediana.

Entuziasmat la culme am mers mai departe cu „închipuirile": mi-am închipuit că relaţia (6) — a opta minune — este descoperirea mea (vezi „vrabia" din titlu...). Şi-atunci, fuga la profesor să-i comunic isprava!

Dezumflarea care a urmat nu a fost ca aceea a unui balon înţepat, ci ca a unuia explodat, cînd am aflat de la profesor că relaţia „mea" era expresia unei teoreme vechi de circa 200 de ani (mi s-a spus şi numele descoperitorului, nume pe care nu l-am reţinut şi pe care n-am reuşit să-l găsesc cu toate căutările mele din ultimul timp). Aşadar „teorema Mitroaica" n-a fost să fie.... Ce mare păcat pentru „un 16 ani" dornic de afirmare meteorică!

Consolarea pentru atîta „nefericire" a venit la gîndul că pornind de la o construcţie ajutătoare inspirată am obţinut, în lanţ, trei teoreme: teorema lui Stewart, teorema clasică a bisectoarei şi teorema „adevărată" a bisectoarei. Desigur, dacă porneam de la Stewart, lucru de care mi-am dat seama imediat după ce am ajuns la relaţia (4), ajungeam foarte repede cu ajutorul „clasicei" la relaţia (6), cum de altfel s-a şi întîmplat. Dar, aş fi fost lipsit, eu atunci ca şi cititorul acum, de micul farmec al înlănţuirii amintite.

Am încercat totuşi ulterior să realizez ceva pornind de la Stewart: deducerea teoremei clasice a bisectoarei. Dar oricît de insistent l-am invocat pe „teoremicianul" Stewart, cel care a răspuns la apel a fost.... Menelaos.

Fie din nou triunghiul $ABC$ (fig. 2) cu bisectoarea $AD$ avînd $D\in(BC)$ şi fie iarăşi $B'=\mathrm{pr}_{AD}B$. Se prelungeşte $BB'$ pînă intersectează $AC$ în $E$. Aplicînd teorema lui Menelaos în triunghiul $BCE$ cu transversala $AD$ şi ţinînd seama de congruenţa triunghiu-

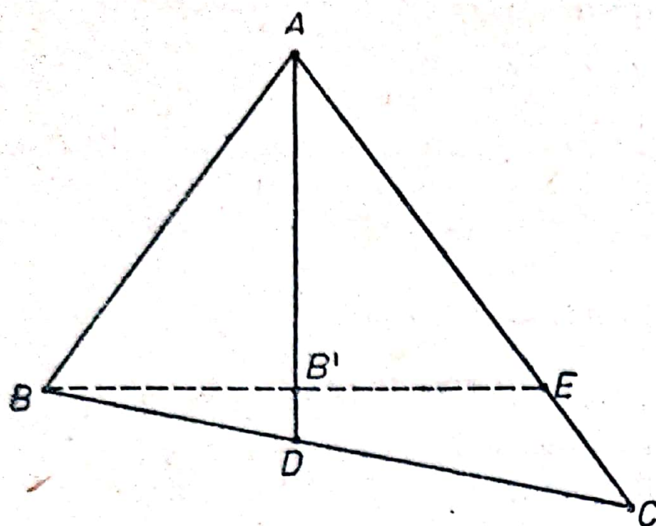


Fig. 2

rilor $AB'B$ și $AB'E$ (din care rezultă $|BB'| \equiv |B'E|$) se poate scrie:

$$\frac{BD \cdot B'E \cdot AC}{CD \cdot BB' \cdot AE} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

de unde $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ c.t.d.

Iată deci o demonstrație a teoremei clasice a bisectoarei care folosește un singur element de construcție ajutătoare ($BE$), spre deosebire de demonstrația clasică în care intervin două și de cea a „lanțului" de mai sus cu trei asemenea elemente.

Pentru amuzament și pentru a încheia aventura cu bisectoarea, voi prezenta o demonstrație a aceleiași „clasice" fără nici un element de construcție ajutătoare, ci doar cu un mic efort de memorare.

Fie $h_a$ măsura înălțimii pornind din vîrful $A$ al triunghiului $ABC$ și $d$ distanța de la piciorul $D$ al bisectoarei la latura $AB$ sau la latura $AC$. Exprimăm suprafețele diferitelor triunghiuri după cum urmează:

$$\sigma[ABD] = \frac{1}{2} . AB . d = \frac{1}{2} . BD . h_a$$

$$\sigma[ACD] = \frac{1}{2} AC . d = \frac{1}{2} . CD . h_a$$

din care rezultă acest șir de trei rapoarte egale

$$\frac{\sigma[ABD]}{\sigma[ACD]} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

dintre care ultimele două constituie c.t.d.-ul căutat.

În partea de „în fine" a încheierii aș menționa că toate demonstrațiile din acest prim „episod" al peripețiilor sînt personale. Nu le-am întîlnit în nici una dintre cărțile sau revistele care mi-au trecut prin mînă, deși poate că existau deja în celelalte.

## 2. O PROBLEMĂ-TEST... SAU „UN LOC GEOMETRIC PREA LA VEDERE"

Nu știu cum mi-a căzut sub ochi prima dată această problemă, dar știu că de la început mi s-a părut potrivită pentru a testa prin ea pe cei ce se pretind a fi ajuns rezolvitori.

Problema se poate rezolva, cum se spune, dintr-o aruncătură de ochi, dar este ciudat că aceasta nu s-a întîmplat cu foarte mulți dintre cei cărora le-am dat-o de-a lungul anilor. Aceasta m-a făcut să cred că este puțin derutantă, înșelătoare, mișcarea punctului care generează locul geometric (care, așa cum spune însuși titlul, este prea la vedere). Afirmația îmi prilejuiește amintirea unei schițe literare în care se vorbește despre căutarea unei scrisori pînă și sub podeaua unei încăperi, nimănui trecîndu-i prin minte să o caute și pe masă unde se afla...

Frumusețea problemei este dată și de prezența aici a două categorii celebre cu care operează captivanta geometrie: triunghiul dreptunghic și patrulaterul inscriptibil. Și ce poate fi mai frumos decît ca dintr-o asemenea distinsă reuniune să ia naștere un loc geometric !

Închei aceste scurte considerații pe marginea scurtei — cum se va vedea — probleme care va urma, convins fiind că rămîne o pietricică de încercare pentru a vedea dacă interlocutorul în probleme de geometrie are sau nu stofă de rezolvitor. Poate rezolvarea acestei probleme nu este o condiție suficientă pentru a-l declara pe cineva „dezlegător", dar cu siguranță e necesară...

Aș menționa în încheierea încheierii că am întîlnit și rezolvitori bine cunoscuți care nu au reușit decît într-un tîrziu acea „singură aruncătură de ochi" care să nimerească soluția...

Și acum iată problema :

**Fie unghiul drept $xoy$ și triunghiul dreptunghic $ABC$ avînd în $A$ unghiul drept iar vîrfurile $B$ și $C$ deplasîndu-se pe $ox$ respectiv $oy$ (fig 3). Se cere să se arate care este locul geometric al lui $A$.**

**Trecînd la soluție, să observăm că triunghiul dreptunghic lăudat și-a făcut apariția chiar din enunț, în timp ce patrulaterul inscriptibil, lăudat așijderea, apare la examinarea figurii 3, sub chipul lui $ABOC$. Aceasta este prima observație pe care adesea candidatul la titlul de rezolvitor o face surprinzător de greu. Urmează o observație care evident se face ușor de către oricine : din „inscriptibilitatea" patrulaterului $ABOC$ rezultă egalitatea măsurilor unghiurilor $\widehat{AOB}$ și $\widehat{ACB}$ (sau, totuna, $\widehat{AOC}$ și $\widehat{ABC}$). Pentru a exploata acest rezultat, cititorul a și făcut observația că triunghiul $ABC$ este „rigid" și deci că $\widehat{ACB}$ are o măsură constantă. Ei bine,**

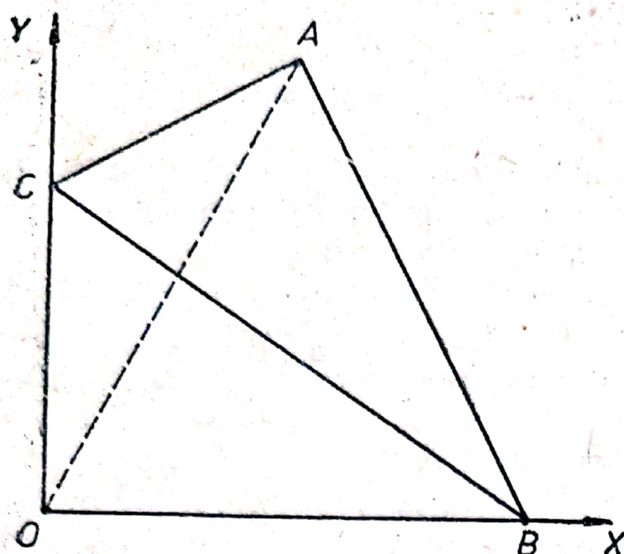



Fig. 3

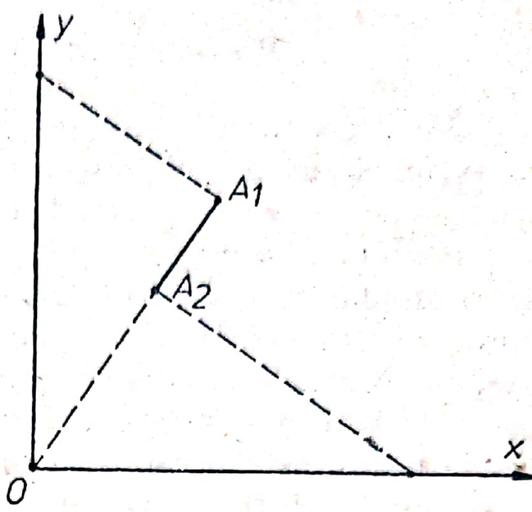



Fig. 4

această a treia observație care ne duce la găsirea locului geometric căutat —pe diagonala $AO$ —se face de către cel testat, cel mai greu.

Am stabilit deci foarte ușor că $m(\widehat{AOB})=m(\widehat{ACB})$ = constant și deci că diagonala $OA$ face unghiuri fixe cu laturile unghiului $xoy$. Așadar punctul $A$ se plimbă pe dreapta fixă $OA$. Mai puțin ușor este de precizat acest loc geometric. Figura 4 ni-l redă sub forma segmentului reprezentat prin linie plină, liniile punctate reprezentînd catetele triunghiului aflat în pozițiile limită. Lungimea „locului" ? Diferența lungimilor catetelor.

Pentru cei care ar obiecta că problema aceasta este prea ușoară aș oferi un supliment prin tratarea cazului în care, așa cum au dreptul, vîrfurile $B$ și $C$ se deplasează și pe prelungirile laturilor unghiului drept. Cu alte cuvinte să vedem care este locul geometric „total", discutînd problema și pentru celelalte trei cadrane (fig. 5). Să observăm deci: 1) Cînd vîrfurile $B$, $C$ parcurg laturile cadranului II, $A$ parcurge exact locul stabilit mai sus ($A_1A_2$, fig. 4) plus segmentul $A_2O$.

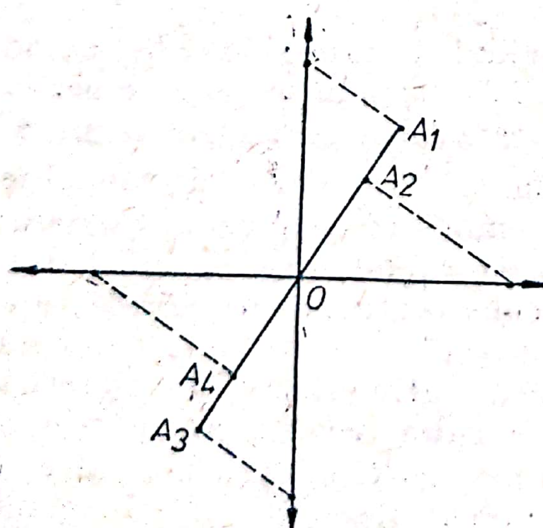



Fig. 5

2) Cadranele III și IV ne vor da cealaltă jumătate a „locului", care este simetricul segmentului $A_1O$ în raport cu $O$.

3) Dacă $A$, $B$, $C$ ar fi becuri colorate, prin mişcarea lor la parcurgerea tuturor cadranelor s-ar obţine o excelentă... orgă de lumini.

### 3. O PROBLEMĂ CARE DECIDE O PROFESIE... SAU „O PRIMĂ PROBLEMĂ DE ADMITERE"

Prin clasa 8-a citisem o carte deosebit de captivantă — cel puţin pentru mintea mea de-atunci — în care se vorbea despre un medic extraordinar ce descoperise „vitalinul". Acesta era un fel de gerovital cu proprietăţi mult superioare, fantastice chiar. Cel de-al doilea erou al cărţii, negativ de data aceasta, era un alt medic, aflat în pragul aceleiaşi descoperiri. Îi lipsea doar un ultim „ceva" pe care — aţi ghicit probabil — vrea să-l obţină de la primul. Mai întîi încearcă să cumpere acea ultimă „formulă", dar este refuzat din considerente de patriotism. În cele din urmă „negativul" recurge la narcotice şi răpire de persoană, astfel că acţiunea capătă o turnură palpitantă.

Am citit această carte pe nerăsuflate. Chiar de la primele pagini mi-a insuflat dorinţa de a deveni şi eu un medic capabil de descoperiri, dacă se poate şi „mai epocale". Impresiile rezultate din lectura cărţii le-am împărtăşit unui coleg, bun prieten. Drept urmare a citit-o şi el şi — cine se aseamănă se adună — s-a ales cu aceeaşi puternică dorinţă. Lucrul acesta ne-a apropiat şi mai mult, a făcut ca prietenia noastră să capete un nou plan de manifestare, un plan de perspectivă pentru viaţa amîndurora. Ne şi vedeam mai ceva decît cei doi „vitalino-descoperitori". Plănuiam să facem disecţii pe animale, ne procuram reviste medicale (din care mai reţin doar că în una am dat peste un cuvînt ale cărui litere redau nu mai puţin de 25 de sunete !). Era o adevărată obsesie datorită căreia eu care agream matematica mai mult decît colegul, în cursul clasei următoare mă cam lăsasem pe tînjală la acest obiect. Lucrurile au continuat astfel pînă cînd s-a produs o adevărată mutaţie... .

Cu totul întîmplător mi-a căzut în mînă o Revistă de Matematică şi Fizică pe care am „catadicsit" s-o răsfoiesc. N-aveam cum să bănuiesc că această răsfoire va produce o adevărată răscolire în sufletul meu, exact acolo unde îi încolţeşte omului ideea de a se îndrepta pe cutare sau cutare drum în viaţă... Mai întîi mi-a atras atenţia un articol care prezenta destul de clar şi tentant facultăţile de fizică şi matematică. L-am citit tot. M-a pus pe gînduri... . Continuînd să răsfoiesc revista am găsit o pagină cu probleme date la examenul de admitere în Facultatea de Matematică şi Fizică din Bucureşti, cu vreo 2—3 ani înainte.

— Ce-ar fi, mi-am zis, să văd dacă am vreo șansă să rezolv măcar una dintre ele ? Zis și făcut ! M-apuc serios de treabă și în scurt timp le rezolv pe toate ? ! Adevărul este că nu erau formidabil de grele, iar eu mai știam cîte ceva, cu toate sacrificiile mele pe altarul lui Hipocrate, ceea ce explică succesul acesta nesperat din start. Succesul acesta a fost cauza mutației care s-a petrecut cu mine : practic imediat am decis că nu voi deveni medic, ci fizico-matematician. Decizia a fost... decisivă !

Toate acele probleme au jucat un rol important în luarea acelei hotărîri esențiale pentru mine, dar eu consider că prima rezolvată este cea care a dat tonul noii partituri... De aceea, pe ea o voi rezolva în rîndurile care urmează. Este problema 762 din Revista de Matematică și Fizică nr. 1 din ianuarie 1953 pe care însă nu o voi enunța ca acolo deoarece mi se pare că acel enunț sugerează o cale de rezolvare prea „fără peripeții". Enunțul la care m-am gîndit în prezent, pentru a aduce cît de cît la zi problema, nu schimbă cu nimic esența acesteia, ci doar modul de a fi pusă, un mod poate ceva mai cu voal...

„Ce relație există între laturile unui triunghi ale cărui mediane pot forma un triunghi dreptunghic ? Dîndu-se două laturi (care ?) să se dea o construcție geometrică a triunghiului".

Începem rezolvarea problemei prin a distribui — după bunul nostru plac fiindcă noul enunț ne-o permite — roluri celor trei mediane în triunghiul dreptunghic pe care-l pot forma (dar pe care nu-l... formează în figura pe care vom opera). Fie deci $ABC$ triunghiul (fig. 6) cu mediane „pitagoreice". Atribuim medianei $AA'$ rolul de ipotenuză și implicit rolul de catete celorlalte două. Pasul următor nu poate fi altul decît scrierea relației care leagă lungimile acestor mediane și pe care o cunoaștem ca pe... teorema lui Pitagora :

(1) $$AA'^2 = BB'^2 + CC'^2$$

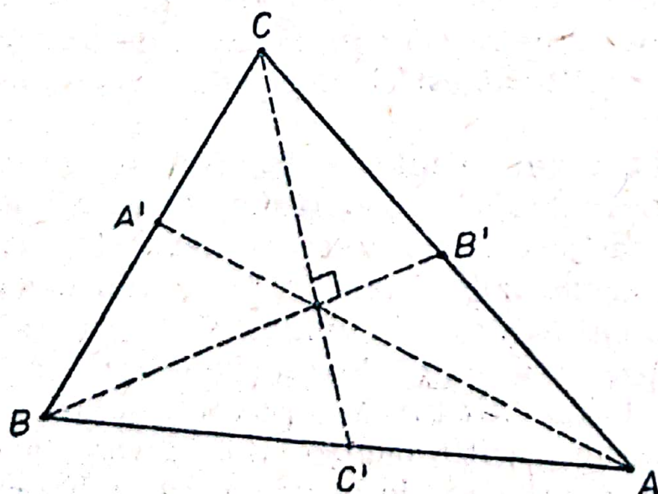


Fig. 6

Notînd cu $M$ punctul de intersecție al medianelor (observați că se cam țin de mine medianele...) și privind atent figura 6, se întrezărește posibilitatea ca de la o relație (1) între segmente concurente (era să săvîrșesc pleonasmul „spițe concurente"...) să se ajungă la o relație între elementele unui triunghi, fie și numai pentru faptul că

ultima este mai palpabilă geometric. Dar nu-i doar pentru atît...
Într-adevăr, înlocuind în (1) pe $AA' = 3\,MA'$; $BB' = \frac{3}{2}\,MB$; $CC' = \frac{3}{2}\,MC$, se obține

$$(2) \qquad MA'^2 = \frac{MB^2 + MC^2}{4}$$

relație care ne spune că triunghiul $BMC$ (în care $MA'$ este mediană) este dreptunghic și are $m(\widehat{BMC}) = 90°$.

Iată un rezultat deosebit de interesant, după părerea mea. Care va să zică, dacă punem condiția ca medianele unui triunghi să constituie laturile unui triunghi dreptunghic, aceasta implică — nu cumva era de așteptat ? — perpendicularitatea celor două care au rolul de catete. Iată încă o „relație ascunsă țîșnind la lumină", relație care ne impune două întrebări :

1) cum se așază unele față de altele bisectoarele sau înălțimile unui triunghi dacă pot forma triunghiuri dreptunghice — întrebare la care îl invit pe cititor să răspundă ;

2) oare există pe lume ceva mai labirintic-armonios, mai simplu-complex sau mai ciudat-firesc decît TRIUNGHIUL — întrebare la care invit să răspundă... lumea întreagă.

Pornind tot de la relația (1) și aplicînd teorema medianei, de numai trei ori, se obține mult mai puțin interesanta relație

$$(3) \qquad AB^2 + AC^2 = 5\,BC^2 \text{ sau } c^2 + b^2 = 5a^2$$

pe care de asemenea ne-o cere problema.

Această relație este mai puțin interesantă din punctul de vedere adoptat la comentarea relației (2), dar sîntem interesați în folosirea ei pentru „subproblema" construcției triunghiului. Ea este aceea care ne spune ce elemente trebuie să se ia ($c$ și $b$) și tot ea ne indică mersul construcției de la început

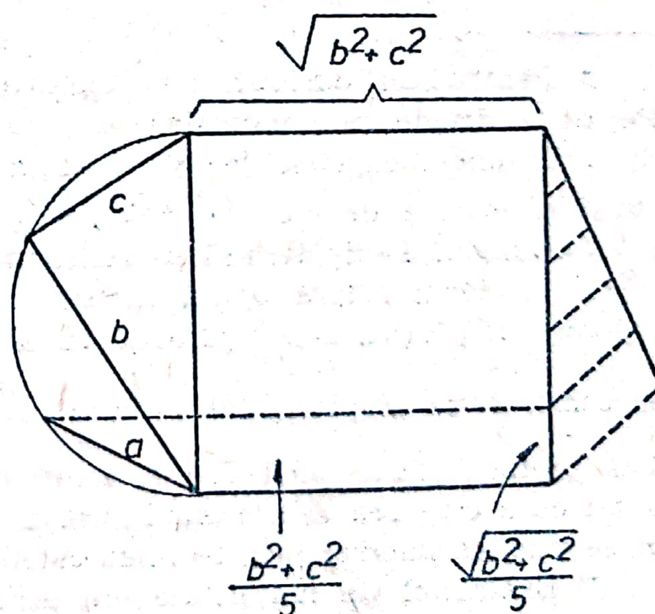


Fig. 7

pînă la sfîrşit, aşa cum îl înfăţişează deosebit de grăitor figura 7*.

## 4. POVESTE C-UN PLIC „CUMPLIT" SAU „PROBLEMA DE LA EXAMENUL DE MATURITATE** DIN 1955"

Iată-mă la sfîrşit de liceu într-o zi deosebit de „gravă" pentru mine : examen de maturitate, scris, la matematică. Nu-mi amintesc să mai fi dat pînă acum vreun examen de sfîrşit de an, aşa că am emoţii cît pentru toţi anii parcurşi pe băncile liceului. Şi unde mai pui că problema ce ni se va da vine direct de la minister, fiind aceeaşi pentru elevii din toată ţara. Este o noutate plină de greutate... Problema vine în plic sigilat, plic de la care parcă mă aştept la o sentinţă, asemenea cu colegii mei dintre care puţini mai au un aer degajat în aşteptare.

Deci acum e acum ! Sînt aproape 40 de luni de cînd am început „disputa" cu liceul şi iată, după cea de-a 40-a ministerul îmi dă mutarea-n plic... Ca la şah, unde deşi doar spectator, am avut totdeauna groază de mutările date în plic. Dar acum cînd sînt eu însumi „jucător" ?

Îmi ocup locul în bancă, dar am senzaţia că intru în... boxă. Incompatibilă stare cu calitatea mea de rezolvitor la Revista de Matematică şi Fizică ! Incompatibilă şi totuşi reală ! Ce o fi fost oare în inima elevilor slabi ?

Sînt două clase paralele. La catedra fiecăreia se află, cred, jumătate dintre profesorii de matematică din oraş ! ? Grupurile acestea par mai nerăbdătoare şi mai curioase decît noi elevii. Şi poate mai emoţionate...

---

* Pentru cei doritori, iată explicaţia construcţiei din figura 7. Pe două drepte perpendiculare se iau, respectiv, segmentele $c$ şi $b$ date. Se unesc capetele lor şi se obţine ipotenuza triunghiului dreptunghic generat de ele ($\sqrt{c^2+b^2}$) ca şi semicercul în care este înscris acest triunghi. Pe ipotenuză se construieşte pătratul respectiv (de arie $c^2+b^2$) a cărui latură opusă ipotenuzei se împarte în 5 părţi egale (operaţia împărţirii este figurată). Cu ultimul din cele 5 segmente egale se construieşte dreptunghiul de laturi $\frac{\sqrt{c^2+b^2}}{5}$ şi $\sqrt{c^2+b^2}$, latura punctată prelungindu-se pînă taie şi semicercul. Segmentul figurat în 7 şi notat cu a este cea de-a treia latură a triunghiului de construit (ceea ce se verifică imediat prin teorema catetei) (n.a.).

** Examenul de maturitate era echivalentul examenului de bacalaureat de astăzi (n.a.).

Ca și ceilalți mă foiam din ce în ce mai tare pe locul meu cînd și-a făcut apariția „omul cu plicul“. Sau „plicul cu omul“ ? Mai degrabă așa puteam să spun căci, la drept vorbind, pe curier abia dacă-l vedeam. Cît privește desfacerea plicului, aceasta s-a asociat în mintea mea cu imaginea profund „deconectantă“ a flăcării alergînd pe șnur spre...

Bombă ! O adevărată bombă a fost pentru mulți problema comunicată căci se referea la sferă, capitol mai puțin agreat de aceștia. De unde știa ministerul ce nu prea le plăcea colegilor mei ??? !

Treptat, treptat însă, ceața emoției s-a ridicat și soarele inspirației a început a-și face apariția. Sub razele lui, rezolvitorul din mine s-a trezit la viață și curînd a intrat în acțiune. Nu mai vedeam decît, din cînd în cînd, grupul de profesori care după toate aparențele se ocupau și ei de problemă (nu prea ușoară pentru vremea aceea). I-am văzut și în momentul în care probabil i-au venit de hac, căci prea li s-au destins figurile dintr-o dată. Priveam toate acestea și parcă mă simțeam într-o competiție nu cu elevii, ci cu profesorii. Nu știu dacă aceste simțăminte mi-au accelerat sau mi-au întîrziat rezolvarea completă a problemei, dar știu că la cîtva timp după succesul lor, acesta a venit să se așeze și în banca mea...

În fine, ce aș mai putea spune ? Că la fel ca mine au „pățit“ toți colegii mei care și ei lucrau susținut la gazeta matematică și fizică.

Problema cea mult de mulți temută se enunța astfel :

„Într-o sferă de rază $R$ se înscrie o piramidă regulată cu baza un pătrat și cu unghiul de la vîrful unei fețe laterale $\alpha$. Să se afle : a) volumul piramidei înscrise ; b) aria laterală și totală a piramidei ; c) unghiul $\alpha$ cînd înălțimea piramidei este egală cu raza sferei“

Și iată cum se rezolva :

Fie $SA = SB = SC = SD = m$ ; $AB = BC = CD = DA = a$ (fig. 8). Din triunghiul $SAD$ rezultă :

(1) $$AD^2 = SA^2 + SD^2 - 2\,SA\,.\,SD\cos\alpha$$

sau $$a^2 = 2(1 - \cos\alpha)\,m^2$$

Din triunghiul dreptunghic $SO_1A$ rezultă relația

(2) $$SA^2 = SO_1^2 + AO_1^2 \text{ sau } m^2 = \frac{a^2}{2} + h^2$$

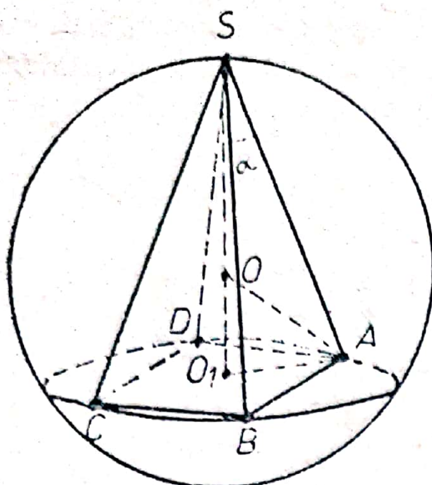



Fig. 8

Din triunghiul dreptunghic $AO_1O$, tot prin teorema lui Pitagora rezultă

$$OA^2 = OO_1^2 + O_1A^2 \text{ sau}$$

(3) $$R^2 = (h - R)^2 + \frac{a^2}{2}$$

Relațiile (1, 2, 3) formează un sistem de ecuații în $a$, $h$, $m$, din care rezultă

(4) $$a = 4R \sin\frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos\alpha}\,;\ h = 2R\cos\alpha\,;$$
$$m = \frac{a}{\sqrt{2(1 - \cos\alpha)}}$$

relații care le servesc acelora dintre cititori care vor să calculeze volumul și ariile piramidei în funcție de $R$ și $\alpha$, și să verifice că la c) avem $\alpha = 60°$.

O dată cu rezolvarea acestei probleme, acolo în condițiile examenului scris, s-a consumat de fapt punctul culminant al „maturității". Se încheia etapa liceală a existenței noastre de învățăcei. Pentru etapa următoare aveam să zburăm care-ncotro...

Nu pot încheia povestea „plicului cumplit" fără o alta, mult mai recentă, pe care poate unii dintre d-voastră, după rezolvarea de mai sus, au sesizat-o deja: în 1983, deci după 28 de ani (!), această problemă a fost dată la „treapta doua", nemaicerîndu-se calculul ariilor laterală și totală... Dacă nu mă credeți, citiți „Informația Bucureștiului" din 8 martie 1984, unde este enunțată și rezolvată puțin diferit de cum s-a procedat mai sus*. Înclin să cred că rezolvarea redată în ziar este asemănătoare cu aceea pe care și eu am dat-o în 1955.

## 5. PERIPEȚII DE NEADMIS LA ADMITERE... SAU „ÎN CARE NU APARE NICI O PROBLEMĂ"

Mă mărginesc la aceste patru probleme cu... probleme din perioada liceală deși în acest timp mi-am desfășurat cea mai mare parte din activitatea de rezolvitor (cîteva sute de probleme din gazetă rezolvate). Aș menționa încă din această perioadă eforturile zadarnice pe care le-am făcut pentru a apărea și la rubrica „Probleme propuse" din „Revista de Matematică și Fizică". Tot ceea ce am

---

* Soluția reprodusă în această lucrare este luată din Revista de Matematică și Fizică, B, nr. 6, din anul 1957 (n.a.).

reușit în această privință a fost să apar la lista rezolvitorilor cu un „P", semn că am trimis la redacție și probleme propuse. Dar, acestea nu pot fi considerate peripeții...

Peripeții adevărate, chiar „prea adevărate", aveau să apară la examenul de admitere* în Facultatea de Fizică și Matematică din București, din anul 1955. Venit dintr-un orășel de provincie, eram strivit de imensitatea capitalei. În starea aceasta am recepționat ca pe un șoc dintre cele mai puternice contactul cu mulțimea de candidați la admitere. Așa se face că am intrat în Amfiteatrul Negreanu la teza de „mate", aproape sugrumat de emoție (ce-i drept mă „ajuta" la aceasta și firea mea...). În această stare mai este de mirare că după ce mi-am scris numele pe colțul foii de teză, am lipit acest colț fără a-l aștepta pe profesor ca să-l verifice ? Nicidecum ! De mirare poate că este, oarecum, reacția profesorului care ne-a prezentat subiectele, cînd a ajuns la mine cu controlul buletinelor de identitate.

— Ce-ai făcut aici, băiete ? a zis dumnealui cînd a dat cu ochii de foaia „criminală".

Trăznetul parcă a căzut asupra mea și sînt convins că dacă nu aș fi avut un cord de numai 17 ani, realizînd ce „grozăvie" săvîrșisem, aș fi făcut infarct cu siguranță. În loc de răspuns am încercat precipitat să dezlipesc colțul, dar niciodată un plic sau un timbru, de pildă, nu se vor lipi atît de bine cum s-a lipit atunci blestematul acela de colț care parcă și azi îmi străpunge inima.

— Dați-mi altă foaie ! am gemut eu cu disperare văzînd că n-am nici o putere asupra unei foi albe, cu un colț lăsat în jos asemenea unei urechi de cîine rău.

— N-avem foi dintr-astea la discreție ! Și a trecut mai departe fără a mai spune ceva, lăsîndu-mi copleșitoarea impresie că nu mai poate face nimic pentru mine, că sînt pierdut.

Despre starea în care m-am aflat timp de o oră după acest moment, prefer să nu scriu decît că trăiam — oare mai trăiam ? — un sentiment de prăbușire. Totală ! O oră (din cele trei acordate pentru lucrarea scrisă) în care albul imaculat al foii buclucașe devenise parcă mai alb... Din starea aceasta nu mă putea scoate decît o „zînă bună"...

Și zîna bună apăru ! Plimbîndu-se încet printre bănci, asistenta care ne supraveghea a ajuns, după ora mea de iad, în dreptul meu.

— Ce faci, băiețaș ? m-a întrebat dumneaei cu cel mai blînd glas din lume, mai blînd decît am să pot gîndi vreodată blîndețea unui glas. De ce nu ai scris nimic pînă acum ?

— Cum să scriu — am început să-i spun printre lacrimi — cînd profesorul a plecat fără să-mi dea altă foaie de teză și fără

* Examen echivalent cu treapta a II-a de astăzi (n.a.).

să-mi spună că pot totuși s-o folosesc pe aceasta ? Mai am cu dreptul să continuu examenul ?

— Prostule, mi-a zis cu aceeași blîndețe, dar mai ferm decît înainte, cum ai putut să crezi asta ? Dacă a trecut mai departe fără a-ți spune ceva, înseamnă că nu te-a suspectat de nimic și că puteai să-ți vezi de treabă. Apucă-te repede de scris că nu mai ai nici două ore ! mi-a poruncit pe același ton nesfîrșit de blînd pe care nu-l voi uita nici mort.

Ceea ce a urmat este o pledoarie în fapt pentru lucru intens cu probleme de matematică și fizică (sau de orice altceva). Trebuie să se rezolve cît mai multe și cît mai variate pentru ca examenele să nu pună în fața candidaților respectivi „noutăți" insurmontabile. Și iată, spre confirmarea celor spuse mai sus, cum s-a petrecut salvarea mea : problemele date nu depășeau în dificultate pe cele mai grele rezolvate din revistă, astfel că după 10—15 minute de reculegere — aș zice de revenire la viață — am putut să le rezolv pe toate trei în mai puțin de două ore rămase.

Așa s-a derulat una dintre cele mai mari pățanii ale mele, una dintre acelea în stare să schimbe cursul unei vieți. Fiind vorba de rezolvarea unor probleme de matematică în cele din urmă, am considerat că pot include întîmplarea amintită în rîndul „peripețiilor unui rezolvitor".

## 6. O FORMIDABILĂ CAPCANĂ... SAU „FEBRA STRICĂ ALGEBRA"

Este chiar prima problemă dintre cele trei implicate în peripețiile evocate mai sus. O problemă care parcă a fost intenționat aleasă la începutul acestora, căci s-a dovedit una dintre cele mai mari capcane pe care mi-a fost dat să le văd atît pînă atunci cît și de-atunci încoace.

Problema în speță avea pentru candidatul bine pregătit, după cum se va vedea și la rezolvarea propriu-zisă, o soluție nu prea greu de găsit, o rezolvare aproape rapidă. Dar pentru cel cu pregătire algebrică mai... anemică, exista o cale pe care dacă o apuca, îl scotea la capăt numai un calculator din ultima generație (de azi !), operînd și cu... litere !

Așadar, problema era prima, părea ușoară dînd impresia unei rezolvări rapide chiar pe calea cea nefastă. Poate de aceea cîteva zeci (!) de candidați au pornit-o tocmai pe această cale care literalmente ducea spre iad... Că trebuie să fi fost un iad cele trei ore de chin neostoit ca și rezultatul la care s-a ajuns, aveau să o dovedească listele cu rezultatele „la scris" afișate în hol, liste pe care apăreau coloane nesfîrșite de nota... „1" (UNU !).

Urmăriți în continuare enunțul problemei, soluția „cea bună“ precum și — pour la bonne bouche — indicarea căii spre soluția „cea rea“...

„Să se formeze ecuația de gradul al doilea care admite ca rădăcini pe $x_1^3 + \frac{1}{x_2}$ și $x_2^3 + \frac{1}{x_1}$, unde $x_1$ și $x_2$ sînt rădăcinile ecuației $x^2 + px + q = 0$“

Notăm cu $X_1$ și $X_2$ rădăcinile „complicate“ din enunț. Pasul următor pe care probabil l-au făcut și „eroii problemei“, este calcularea sumei și produsului rădăcinilor noii ecuații:

$$X_1 + X_2 = x_1^3 + x_2^3 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) + \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}$$

$$X_1X_2 = (x_1x_2)^3 + \frac{1}{x_1x_2} + x_1^2 + x_2^2 = (x_1x_2)^3 + \frac{1}{x_1x_2} + (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

Numai că pentru cei „anemic pregătiți“ aceste expresii arătau cu totul altfel de la cel de-al doilea egal încolo... Noi cei bine pregătiți știm că după ce am făcut să apară peste tot $x_1 + x_2$ și $x_1x_2$, urmează să le înlocuim cu valorile lor rezultînd, conform relațiilor lui Viète, din ecuația $x^2 + px + q = 0$.

Deci folosind $x_1 + x_2 = -p$ și $x_1x_2 = q$, obținem ecuația cerută:

$$qX^2 - p(3q^2 - qp^2 - 1)X + q^4 + p^2q - 2q^2 + 1 = 0$$

Nimic mai simplu!

Da, dar calculați pe $x_1^3 + \frac{1}{x_2}$ și $x_2^3 + \frac{1}{x_1}$ înlocuind pe $x_1$ și $x_2$ cu valorile lor rezultate din rezolvarea ecuației $x^2 + px + q = 0$, adică cu $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, apoi faceți suma și produsul de mai sus, ridicați-le la puterile cerute și veți ajunge să... mă blestemați.

Ei bine, aceasta a fost nefasta (mai bine era ne-fosta!) cale pe care au apucat-o nefericiții mei colegi întru examen de admitere...

## 7. INCREDIBIL DAR ADEVĂRAT... SAU „GEOMETRIE PLUS TRIGONOMETRIE LA ADMITEREA DIN '55“

Aceasta este cea mai importantă problemă dintre cele trei date la admiterea de cvasi-tristă amintire pentru mine... De ea se leagă și o amintire al cărei erou este cel ce ar fi devenit cu sigu-

ranță marele matematician CRISTEA ION, dacă un accident stupid nu l-ar fi răpit vieții și matematicii la numai 27 de ani.

Cristea Ion este cel care în anii 1954, 1955, 1956 a dominat zdrobitor activitatea matematică a elevilor de liceu. Nu a existat olimpiadă care să nu fie cîștigată de Cristea, nu a existat rubrică cu evidențiați dintre rezolvitorii de probleme, în care el să nu se situeze în frunte. Adaug acestora cele auzite despre el ca student, apoi ca absolvent și ca doctor în matematică și îndrăznesc să afirm că acest matematician era înzestrat cu o capacitate cu totul ieșită din comun.

Ei bine, tocmai datorită acestei zestre extraordinare a fostului meu coleg, amintirea pe care o voi depăna a fost, este și va fi uluitoare pentru mine.

Așadar iată-ne — facem un salt peste momentele desfășurării tezei de matematică — în fața listelor cu notele de la examenul scris. Firește, primul lucru care-mi atrage atenția sînt nesfîrșitele coloane de „1“ despre care am amintit la problema precedentă. Al doilea este nota mea, iar al treilea — oare văd bine ? — este nota lui Cristea : 4 (notele maxime în acea vreme erau cele de 5). Cristea Ion, nota 4 ! Asta le întrecea pe toate. Cunoscîndu-l personal, două săptămîni mai tîrziu, l-am întrebat dacă a fost cu putință ca el să fi luat doar „4“ la teza de matematică. Spre stupoarea mea a răspuns „da“ cu aceeași ușurință înspăimîntătoare cu care rezolva probleme de 100 de ori mai grele decît cea în cauză.

Cum se produsese minunea ?

Simplă neatenție ! O neatenție pe care și-o permit numai marile capacități — am gîndit eu atunci și gîndesc și azi cînd relatez cu mare emoție aceste „peripeții“.

Curînd după aceasta am avut ocazia să văd la lucru — pe viu — marea capacitate despre care scriu. Faptul s-a petrecut imediat după ce am fost cazați în aceeași cameră din căminul studențesc. În asemenea condiții propice, cineva a declanșat o acerbă întrecere cu probleme propuse, în special de geometrie. Fiecare dintre noi, chiar și eu, aveam o mare rezervă de asemenea probleme, unele dintre ele fiind de maximă dificultate, astfel că lupta a devenit repede de un rar „dramatism“.

Toți am reușit să rezolvăm în timpul cuvenit cîte o bună parte din problemele puse la bătaie. Toți în afară de... Cristea ! De Cristea Ion care a rezolvat tot, tot, tot. Dar asta nu-i încă extraordinar. Extraordinară este, după mine, rapiditatea amețitoare cu care le rezolva. Îmi amintesc că aveam o problemă propusă pe care mă străduisem s-o „încurc“ la maximum. Ei bine, problema aceasta, cînd i-am prezentat-o și lui Cristea, mi-a fost rezolvată într-un minut ! ? !

Acesta era Cristea Ion!

Și acum iată enunțul și soluția problemei nu prea dificile, dar care a reușit să smulgă o greșeală celui de departe cel mai bun dintre noi:

„Se consideră prisma regulată $VABC$, avînd ca bază un triunghi echilateral $ABC$ înscris în cercul cu centrul în $O$ și de rază $r$. Se notează cu $\theta$ unghiul $AVB$. Se cere: 1) să se calculeze în funcție de $r$, latura bazei, muchia laterală, apotema și aria laterală a piramidei pentru $\theta = 60°$ și $\theta = 90°$; 2) în cazul general se notează cu $\alpha$ măsura unghiului $OAV$; să se calculeze în funcție de $\alpha$ $\sin \theta/2$ și $\cos \theta$; 3) se notează $\cos \theta = y$ și $\cos 2\alpha = x$; se cere să se exprime $y$ în funcție de $x$ cînd $\alpha$ crește de la 0° la 90°".

Rezolvarea punctului (1) constituie un fel de $A$, $B$, $C$ geometrico-trigonometric, așa că ne putem permite a nu ne ocupa de ea.

Pentru punctele (2, 3) esențială în primul rînd este relația trigonometrică $\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$. Din figura 9 rezultă simplu și succesiv: $AB = \sqrt{3}r$;

$$AV = \frac{1}{\sin\theta/2}\cdot\frac{AB}{2} = \frac{r}{\cos\alpha}.$$

Se obține mai departe

$$(1)\qquad \sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha,$$

prima relație cerută la punctul (2). Cea de-a doua rezultă din aceasta folosind relația auxiliară de sus:

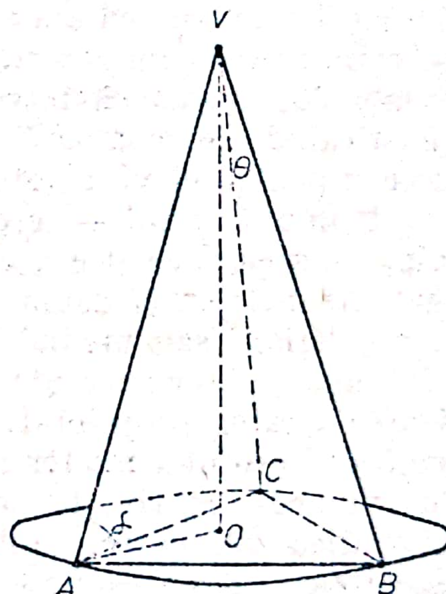


Fig. 9

$$(2)\qquad \cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - \frac{3}{2}\cos^2\alpha.$$

Aceeași relație ajutătoare, de data aceasta între $\cos^2\alpha$ și $\cos 2\alpha$, ne duce la relația căreia i se aplică substituția cerută de problemă:

$$(3)\qquad \cos\theta = -\frac{3}{4}\cos 2\alpha + \frac{1}{4} \text{ sau } y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}.$$

Am ajuns la acea parte a problemei care reclamă cea mai mare vigilență. reprezentarea grafică a relației (3) ținînd seama

că $x = \cos 2\alpha$ variază între $-1$ ($\alpha = 90°$) și $+1$ ($\alpha = 0°$). Rezultă deci un segment de dreaptă care nu trece prin origine, delimitat de dreptele $x = \pm 1$.

Greșeala lui Cristea a fost aceea că a pierdut din vedere cine sînt $x$ și $y$, astfel că i-a rezultat dreapta din relația (3) și nu segmentul pe care l-am precizat.

Incredibil (pentru sau la unul ca el !) dar adevărat !

## 8. CERCUL CELOR ZECE PUNCTE... SAU „POZIȚIA CERCULUI ÎNSCRIS FAȚĂ DE CEL AL LUI EULER"

În scurtul relaș de după examenul de admitere-scris, am descoperit la unul dintre „co-candidați" o carte absolut remarcabilă. Era scrisă în franceză și semnată de un „oarecare" Traian Lalescu. Ați înțeles desigur că era vorba de faimoasa *Geometria triunghiului*, pe care, spre rușinea mea, o întîlneam pentru prima oară. Repede mi-am dat seama că întrunește 1001 de minuni ale triunghiului, constituind „o comoară pentru profesorii de matematică din licee și pentru elevii acestora".

Primul capitol — cercul celor nouă puncte* — a fost pentru mine marea revelație a cărții, prin frumusețea sa intrinsecă fără egal. Atunci, ca și acum, cea mai frapantă proprietate a acestui cerc eulerian (sau medial cum i se spune în carte) mi s-a părut a fi tangența lui cu cercul înscris, în punctul lui Feuerbach. Demonstrarea acestei proprietăți am găsit-o echivalentă cu dezlegarea celui mai profund mister din „miraculosul spațiu" al triunghiului. Pentru acest motiv, la care se adaugă demonstrația extrem de telegrafică din carte, m-am hotărît s-o inserez „peripețiilor", bineînțeles cu o expunere pe înțelesul tuturor... Înfăptuirea ultimului deziderat a fost posibilă datorită faptului că elementele de teorie necesare nu depășesc nivelul clasei a IX-a, dificultatea demonstrației rezultînd exclusiv din înlănțuirea lor.

Și-acum, abandonînd unele dintre notațiile „grecești" ale lui Lalescu și simplificînd unele figuri, haideți cu mine și veți vedea ce ușor vă va părea restul cărții după ce veți fi efectuat acest „exercițiu" (pe care ar fi trebuit să-l plasez undeva la sfîrșit dacă nu m-aș fi legat, prin prefață, să păstrez ordinea cronologică...).

Figura 10, în care numai cercul înscris figurează parțial, va încerca să suporte toate judecățile care vor duce la descoperirea

---

* Cu cercul lui Euler sau „cercul celor nouă puncte" ați făcut cunoștință prin problema 15 de la pagina 93 a manualului de geometrie și trigonometrie pentru clasa a IX-a, ediția din 1984 (n.a.).

punctului lui Feuerbach. Să facem cunoştinţă cu diversele-i elemente de la care se pleacă:

$I$, $I_a$, $H$: centrul cercului înscris, centrul cercului exînscris corespunzînd unghiului $A$, ortocentrul,
$H_a$, $M$: piciorul înălţimii din $A$, piciorul bisectoarei din $A$.
$D$, $D_a$: punctul de tangenţă al „înscrisului" cu $BC$, idem al „exînscrisului".
$A'$, $A''$: mijlocul laturii $BC$ şi mijlocul segmentului $AH$, (extremităţile unui diametru al cercului lui Euler).

Am conturat astfel „personalităţile" celor două cercuri cărora prin cercetări susţinute trebuie să le descoperim legătura.

Primul contact cu cercul lui Euler se face, fireşte, prin punctul $A'$ în care se şi duce tangenta $A'T'$. Primul contact cu cercul înscris se face pentru a găsi pe acesta un punct omolog lui $A'$, adică un punct în care tangenta dusă la acel cerc să fie paralelă cu $A'T'$. Acesta nu este altul decît $D'$, simetricul lui $D$ în raport cu bisectoarea $AM$. Într-adevăr, tangenta din $M$ la cercul înscris, în $D'$, face cu $AC$ un unghi congruent cu $B$ (demonstraţia este imediată)

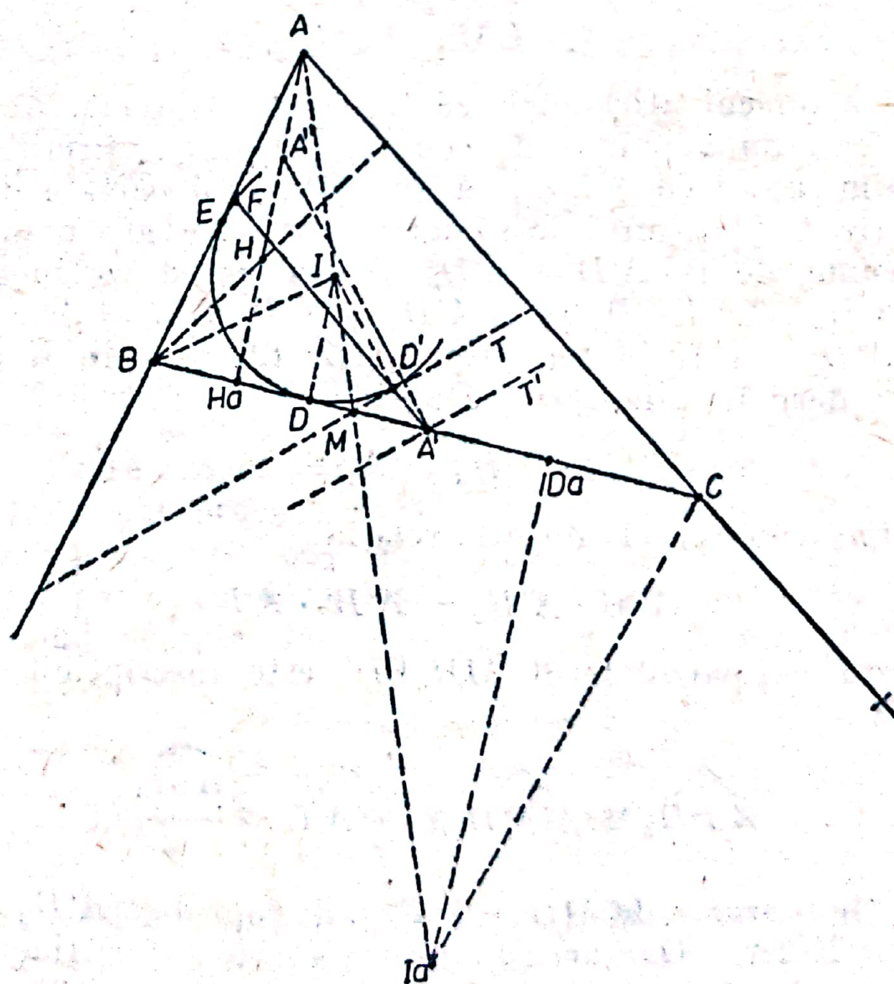



Fig. 10

întocmai ca tangenta $A'T'$ la cercul lui Euler (se demonstrează ușor ținînd seama de $A'T' \perp A'A''$ și de faptul că patrulaterul $A'H_aC'A''$, unde $C'$ este mijlocul laturii $AB$, este inscriptibil). Deci tangentele $MT$ și $A'T'$ sînt paralele, iar punctele $A'$ și $D$ sînt omoloage. Aceasta înseamnă că devine de mare interes punctul $F$ în care dreapta $A'D'$ întîlnește a doua oară cercul înscris...

Prima observație pe figura îmbogățită cu cele trei drepte, ne duce la prima relație utilă :

(1) $$A'D' \cdot A'F = A'D^2$$

în care ați recunoscut puterea punctului $A'$ față de cercul înscris.

A doua observație este, poate, cea mai subtilă din întreaga demonstrație. Ea pornește de la teorema care spune că punctele de contact $D$ și $D_a$ împart segmentul $H_aM$ în același raport (demonstrația este simplă întrucît aceste patru puncte sînt proiecțiile pe $BC$ ale punctelor $A$., $I$, $M$, $I_a$, la care se observă, uzînd de teorema bisectoarei, că $I$ și $I_a$ împart segmentul $AM$ în același raport). Se capătă deci relația ajutătoare :

(2) $$\frac{DH_a}{DM} = \frac{D_aH_a}{D_aM}$$

care spre a deveni utilă apelează la o nouă teoremă. Aceasta se referă la cele două puncte de contact, $D$ și $D_a$, afirmînd că sînt simetrice în raport cu $A'$ sau, dacă vreți, egal depărtate de vîrful $B$ respectiv $C$ (dați-mi voie să nu vă mai dau nici o indicație). Deci pornind de la $A'D = A'D_a$ și continuînd cu substituirile $DH_a = A'H_a - A'D$, $D_aH_a = A'H_a + A'D$, $DM = A'D - A'M$, $D_aM = A'D + A'M$ în relația-proporție (2) pe care o supunem apoi unor derivări adecvate, se obține

(3) $$A'M \cdot A'H_a = A'D^2.$$

Aceasta împreună cu (1) duce la relația

(4) $$A'M \cdot A'H_a = A'D' \cdot A'F$$

care atestă că patrulaterul $MH_aFD'$ este inscriptibil. Rezultă infailibil :

(5) $$\widehat{A'FH_a} \equiv \widehat{A'MD'} \equiv \widehat{T'A'C} = \frac{\overset{\frown}{A'H_a}}{2}$$

unde s-a ținut seama de $MD' \parallel A'T'$ și de faptul că $A'H_a$ e coardă a cercului Euler. Dar aceasta înseamnă că $F$ aparține cercului celor 9 puncte. Prin această descoperire am „încolțit“ adevărul pe care acum urmează să-l „prindem“. Vom observa deci că tan-

gentele în $A'$ și $F$ la cercul Euler sînt egal înclinate față de coarda $A'F$, ceea ce se poate spune și pentru tangentele în $D'$ și $F$ la cercul înscris. Dar deoarece tangentele $A'T'$ și $D'M$ sînt paralele, rezultă că tangentele în $F$ la cercul Euler și la cel înscris coincid. Prin urmare — adevărul „prins" — cele două cercuri sînt tangente în $F$, punctul lui Feuerbach.

Această prea laborioasă demonstrație a teoremei lui Feuerbach mă determină să-i propun cititorului o altă cale: calcularea distanței dintre centrele cercurilor ținînd seama că aceasta este mediană în triunghiul format de $I$, $H$ și $O$ (centrul cercului circumscris), triunghi ale cărui mini-laturi sînt ușor exprimabile în funcție de laturile și unghiurile triunghiului mare.

În încheiere, o întrebare: ținînd seama de existența punctului lui Feuerbach, n-ar fi drept să spunem „cercul celor zece puncte?"

## 9. CUM L-AM FĂCUT „OCHI ȘI URECHI" PE EXAMINATOR... SAU „INFILTRAREA LUI PTOLEMEU ÎN TRIGONOMETRIE"

Iată-mă și la examenul oral de matematică (sîntem tot la admitere !)

Aștept să-mi vină rîndul. Din cînd în cînd particip la ciorchinii care se formează instantaneu pe cei ce ies de la „interogatoriu". Nimeni n-a luat încă nota maximă ; profesorul examinator găsește mereu ceva suplimentar de întrebat, ceva la care nu prea se răspunde. În plus — și asta rețin îndeosebi — pare a nu fi deloc atent la ce i se spune de către „nefericitul" candidat...

Dar iată că îmi vine rîndul. Pătrund în sală cu un curaj care contrastează totuși cu cel de la teză. Poate și din cauză că de data asta sala în care are loc examenul este mult mai mică...

Cît timp am pregătit subiectul mi-am putut da seama că într-adevăr profesorul, deși nu scăpa nimic din ceea ce spuneau examinații, părea că dormitează. Nu-mi amintesc exact ce am gîndit văzînd aceasta dar ideea trebuie să fi fost prelucrabilă cam astfel:

Perspectiva conturată
Ce nu-mi convenea deloc,
Se cerea deci măturată
Cu o mătură ad-hoc.

Și mătura ad-hoc a constituit-o chiar primul subiect !

— Ce subiect ai la trigonometrie ? m-a întrebat profesorul pe un ton mai mult decît sobru ce ar fi putut să prevestească un „viitor" sumbru.

— Deducerea relațiilor care dau sin $(\alpha + \beta)$ și cos $(\alpha + \beta)$.

— S-auzim ! zice domnia-sa.

— Eu..., zic eu, vreau să fac această demonstrație folosind patrulaterul inscriptibil și aplicînd teorema lui Ptolemeu*.

Clipe de tăcere în care doi ochi din patru s-au deschis larg de-a binelea. Era vizibil că lovisem în plin, adică de fapt în „golul" pe care-l avea profesorul în pregătirea sa trigonometrică. Dacă adăugați la reacția aceasta faptul că mi-am susținut demonstrația pe un ton deloc sobru, veți înțelege de ce profesorul, cel puțin la examinarea mea, a lepădat cu totul masca lui de auditor „nevinovat" de concerte...

Că tot nu am luat nota maximă nu are nici o importanță pentru demonstrația „ptolemeică" pe care o voi reproduce îndată. Important este că prin această demonstrație am putut să „topesc" ceea ce îmi este cel mai nesuferit în materie de examen : glacialitatea examinatorului.

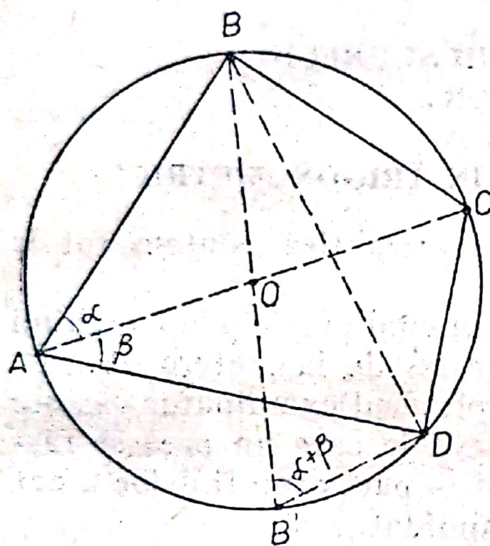



Fig. 11

Fie patrulaterul inscriptibil $ABCD$ împreună cu cercul său circumscris. Proprietatea esențială, pentru demonstrația urmărită, a acestui patrulater, este că diagonala sa, $AC$ de pildă, este chiar diametrul cercului circumscris (fig. 11). Am pregătit astfel scena pentru intrarea lui Ptolemeu. Faimoasa lui teoremă ne spune indubitabil (în contrast cu „faimosul" său sistem geocentric) că :

(1) $AB.CD + AD.BC = AC.BD.$

Se împarte această relație la $AC^2$ și rezultă :

(2) $$\frac{BD}{AC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CD}{AC} + \frac{AD}{AC} \cdot \frac{BC}{AC}$$

relație care „mustește" de trigonometrie. Într-adevăr ținînd seama de faptul că triunghiurile $ABC$ și $ADC$ sînt dreptunghice, relația (2) devine :

(3) $$\frac{BD}{AC} = \cos\alpha \cdot \sin\beta + \cos\beta \cdot \sin\alpha$$

* Aplicarea teoremei lui Ptolemeu la deducerea unei relații trigonometrice diferită de cele deduse în această lucrare se găsește în cartea lui Viorel Gh. Vodă intitulată : *Surprize în matematica elementară*, Editura Albatros, București 1981, p. 114, (n.a.).

unde $\alpha$, $\beta$ sînt unghiurile pe care diagonala $AC$ le face cu laturile $AB$, $AD$.

Construind diametrul $[BB']$, se obține triunghiul dreptunghic $BDB'$ al cărui unghi $\widehat{BB'D}$ are aceeași măsură ca unghiul $\widehat{BAD}$ al patrulaterului, adică $\alpha + \beta$. Prin urmare ținînd seama că $(AC) \equiv (BB')$, rezultă :

(4) $$\frac{BD}{AC} = \frac{BD}{BB'} = \sin(\alpha + \beta)$$

relație cu ajutorul căreia (3) devine exclusiv trigonometrică, adică q.e.d. :

(5) $$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

Pentru a stabili relația care ni-l dă pe $\cos(\alpha + \beta)$, pe aceeași figură considerăm patrulaterul inscriptibil $ACDB'$. Aplicînd și de data aceasta „Ptolemeu", va rezulta :

(6) $$AC \cdot B'D + AB' \cdot CD = AD \cdot B'C$$

relație pe care o scriem succesiv, mai întîi împărțind-o la $AC^2$ și apoi ținînd seama de unele congruențe :

(7) $$\frac{B'D}{AC} + \frac{AB'}{AC} \cdot \frac{CD}{AC} = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{B'C}{AC}; \quad \frac{B'D}{B'B} + \frac{BC}{AC} \cdot \frac{CD}{AC} = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AB}{AC}$$

care nu este altceva decît exprimarea geometrică a relației trigonometrice

(8) $$\text{Cos}(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta \qquad \text{c.t.d.}$$

Acestea au fost cele două relații trigonometrice prin care, deducîndu-le ca mai sus, l-am făcut „numai ochi și urechi" pe examinatorul de la admitere. Atît cunoșteam pe vremea aceea grație activității de la cercul de matematică al Liceului Mixt Calafat, cerc condus cu competență și eleganță de către profesorul Teodor Parapancea.

Întîmplarea a făcut ca exact cînd „reconstituiam" demonstrațiile de mai sus, să-mi cadă sub ochi surprinzătoarea — în sensul cel mai bun al cuvîntului — carte a lui Viorel Gh. Vodă, *Surprize în matematica elementară*. Cartea mi-a prilejuit o majoră satisfacție în general și cîteva constatări în special. Prima constatare : la pagina 113 se înfățișează o figură extraordinară urmată de un tabel extraordinar la pagina următoare, ambele vrînd parcă să ne vorbească de ambiția „bătrînei" geometrii de a arăta că al ei este totuși ultimul cuvînt în ce o privește pe „derivata" ei, trigono-

metria ; într-adevăr în acest capitol sînt deduse toate relaţiile trigonometrice exclusiv pe cale geometrică. A doua constatare : teorema lui Ptolemeu este folosită doar pentru deducerea relaţiei $\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\beta\cdot\cos\beta$ ceea ce este cu totul altceva decît cele ce aşterneam pe hîrtie în acel moment — deducerile de mai sus. A treia constatare n-a fost o constatare ci o... întrebare : oare nu s-ar putea obţine şi celelalte relaţii trigonometrice, de pildă $\sin(\alpha-\beta)$ şi $\cos(\alpha-\beta)$, cu ajutorul teoremei lui Ptolemeu ? Drumul era deschis deoarece a doua constatare îmi arăta clar că nu riscam să deschid uşi... deschise.

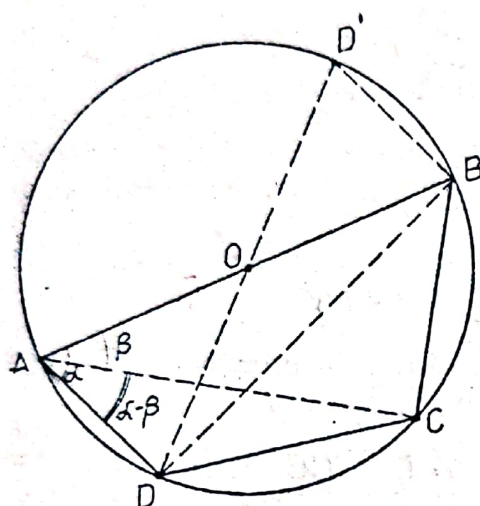


Fig. 12

După căutări care poate au fost prea susţinute, iată cum am răspuns la această întrebare. Fie deci din nou cercul în care încercăm să ne învîrtim în continuare cu folos, de data aceasta însă patrulaterul considerat are o latură egală cu diametrul (fig. 12). Fie $ABCD$ acest patrulater şi $[AB]$ latura-diametru. O altă deosebire mare faţă de demonstraţiile reproduse mai sus constă în „botezarea" diferită a unghiurilor la care ne vom referi de-acum încolo; aceasta se face astfel încît să devină operativ unghiul $\alpha-\beta$. Vom consemna deci $m(\widehat{BAD})=\alpha$, $m(\widehat{BAC})=\beta$ şi $m(\widehat{CAD})=\alpha-\beta$. Acestea fiind consemnate, nu ne rămîne decît să-i dăm din nou cuvîntul lui Ptolemeu :

(9) $$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$$

de unde prin împărţirea devenită de-acum familiară şi sărind o etapă de calcul

(10) $$\frac{CD}{AB}+\cos\alpha\cdot\sin\beta=\cos\beta\cdot\sin\alpha.$$

Mergînd pe drumul cunoscut, se construieşte diametrul $DD'$ şi din triunghiul $DCD'$ cu $m(\widehat{CD'D})=\alpha-\beta$ precum şi ţinînd seama de $(AB)\equiv(DD')$, rezultă relaţia

(11) $$\frac{CD}{AB}=\frac{CD}{DD'}=\sin(\alpha-\beta)\text{ sau}$$

(12) $$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta \qquad \text{c.t.d.}$$

Pentru deducerea relației care dă cos $(\alpha - \beta)$, se folosește ca și la „$\alpha + \beta$", fără vreo schimbare, tot figura 12. Numai patrulaterul considerat este altul și anume $AD'BC$. Relația teoremei lui Ptolemeu aplicată acestui patrulater, împărțită la $AB^2$ duce la

$$\frac{D'C}{AB} = \frac{AD'}{AB} \cdot \frac{BC}{AB} + \frac{AC}{AB} \cdot \frac{BD'}{AB} \tag{13}$$

de unde rezultă cea de-a patra componentă a cvartetului [sin $(\alpha \pm \beta)$, cos $(\alpha \pm \beta)$]:

$$\cos(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta. \tag{14}$$

Am adăugat astfel două relații deduse „ptolemeic" celor două (plus una din *Surprize...*) deja cunoscute. Vrea cititorul să încerce a adăuga altele folosind aceeași prodigioasă teoremă?

În încheiere, vreau să spun că tare aș dori să știu dacă aceste infiltrări „ptolemeice" în trigonometrie au fost sau nu făcute și de către... Ptolemeu, despre care am citit că s-a ocupat și de trigonometrie.

## 10. ALUNECÎND PE-O TRANSVERSALĂ... SAU „TEOREMA LUI CRISTEA"

Relația care exprimă teorema lui Menelaos a fost pentru mine, de la început, la fel de admirat ca și de temut. De admirat pentru simetria ei perfectă, pentru că întîlneam prima oară produsul a trei rapoarte, și încă egal cu unitatea etc., iar de temut pentru că mi se părea greu de ținut minte cum se așază în acest lanț de rapoarte fiecare dintre segmentele care-i constituie verigile; apoi mulțimea acestor segmente.

Dar teama aceasta, departe de a mă îndepărta de teoremă, m-a îmboldit la complicații... Astfel, m-am gîndit că s-ar putea face o combinație între transversala Menelaos, porțiunea din interiorul triunghiului, și o ceviană oarecare, pornind din vîrful comun laturilor care delimitează transversala (fig. 13).

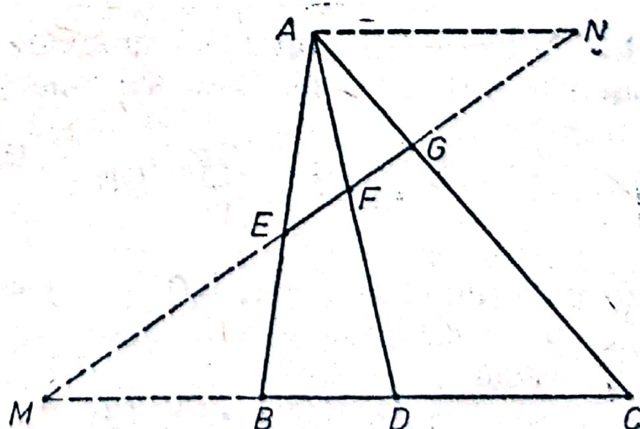



Fig. 13

Se observă foarte ușor că dacă se prelungește transversala pînă ce taie și a treia latură, se poate aplica teorema lui Menelaos nu mai puțin decît de șase ori în serii de cîte trei, după cum se alege transversala pe care se alunecă... Apucînd pe un asemenea drum am ajuns realmente la complicații absolut nedorite. În cele din urmă a trebuit să caut altă cale care să n-aibă nici în clin nici în mînecă cu Menelaos, dar care să mă ducă la o relație elegantă, fie chiar mai complicată decît teorema lui Menelaos.

Fie $E$, $F$ și $G$ punctele în care transversala interesectează latura $AB$, ceviana $AD$ respectiv latura $AC$. Prelungirile acestei transversale intersectează prelungirea laturii $BC$ în $M$ și o paralelă prin $A$ la $BC$, în punctul $N$. Din asemănarea triunghiurilor $AEN$ și $BEM$ rezultă:

(1) $$\frac{BE}{AE}=\frac{BM}{AN}$$

iar din perechile de triunghiuri asemenea $AFN$, $DFM$ și $AGN$, $CGM$ avem respectiv

(2) $$\frac{FD}{AF}=\frac{DM}{AN}$$

(3) $$\frac{GC}{AG}=\frac{CM}{AN}$$

Scăzînd pe (2) din (3) se obține

(4) $$\frac{CG}{AG}-\frac{DF}{AF}=\frac{CM-DM}{AN}=\frac{CD}{AN}$$

De asemenea, scăzînd (1) din (2) va rezulta

(5) $$\frac{DF}{AF}-\frac{BE}{AE}=\frac{DM-BM}{AN}=\frac{BD}{AN}$$

În fine, împărțind membru cu membru relațiile (4) și (5) și aplicînd apoi proprietatea de bază a proporției, se ajunge la

(6) $$\frac{CG}{AG}\cdot BD-\frac{DF}{AF}\cdot BD=\frac{DF}{AF}\cdot CD-\frac{BE}{AE}\cdot CD$$

de unde ținînd seama că $BD+CD=BC$ rezultă foarte frumoasa — zic eu — relație care la vremea respectivă mi-a generat un mare entuziasm:

(7) $$\frac{BE}{AE}\cdot CD+\frac{CG}{AG}\cdot BD=\frac{FD}{AF}\cdot BC.$$

Entuziasmul care m-a cuprins la obţinerea acestei relaţii a fost mai mare decît cel pe care-l trăisem la „găsirea“ relaţiei care dă pătratul bisectoarei într-un triunghi. Dacă nu o teoremă — gîndeam eu — măcar un subiect frumos pentru o notă matematică (pe care o visam de multă vreme şi pe care o mai visez şi astăzi), căci o asemenea relaţie nu putea trece neluată în seamă.

Ce spuneţi ? Aşa-i că şi dumneavoastră găsiţi interesantă relaţia (7) ? Sau aţi găsit-o deja de prin '56 cînd a apărut, totuşi, sub forma unei note în revistă, dar sub o cu totul altă semnătură !

— Cu totul altă semnătură ?

— Da, căci iătă ce s-a întîmplat în timp ce eu îmi prelungeam scăldatul în entuziasm. Cineva, cineva cu cel puţin un ordin de mărime mai capabil decît mine, trebăluise la acelaşi lucru şi publica în Revista de Matematică şi Fizică, seria B, ianuarie 1956, p. 19, o amplă notă matematică... Rezum pe puncte conţinutul acelei note :

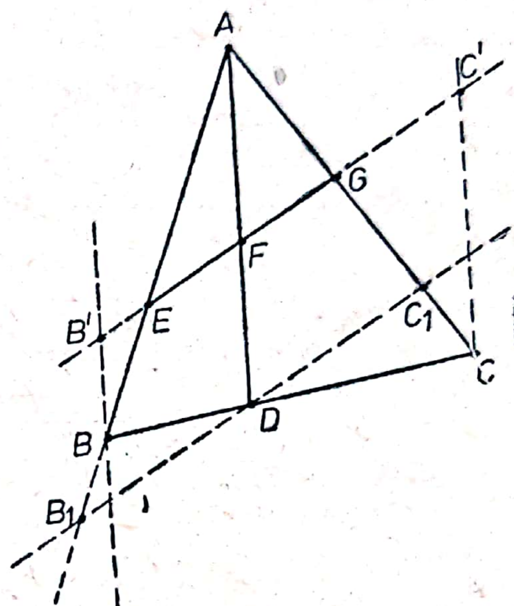


Fig. 14

1) Se generalizează astfel problema 1301 din R.M.F.(B) : „dacă $D$ este un punct pe latura $BC$ a unui triunghi $ABC$ iar $E$, $F$, $G$ sînt intersecţiile unei drepte oarecare cu $AB$, $AD$, $AC$, atunci are loc relaţia

$$\frac{BE}{AE} \cdot CD + \frac{CG}{AG} \cdot BD = \frac{DF}{AF} \cdot BC$$

(Se observă imediat că această relaţie, care este dedusă în această notă prin (fig. 14) construirea lui $B_1C_1 \parallel EG$ şi $BB' \parallel CC' \parallel AD$, este chiar relaţia 7 dedusă de mine pe o cale diferită)

2) Se tratează şi cazul cînd $AD$ e în afara triunghiului ;

3) De asemenea cazul cînd transversala intersectează prelungirile laturilor $AB$, $AC$ şi cevienei $AD$ ;

4) Se continuă cu cazul în care numai unul dintre cele trei puncte se află pe prelungirea laturii respective ;

5) Se demonstrează o reciprocă a problemei ;

6) Se analizează cazul cînd triunghiul $ABC$ este echilateral ;

7) În final se consideră cazul cînd $AD$ este mediană în $\Delta ABC$

Am citit această desăvîrşită notă, numai eu ştiu cu cît necaz pe neşanşa mea... M-am resemnat însă destul de repede gîndind cine era „adversarul".

Deci cine era autorul mult-neaşteptatei (de către mine) note? Acesta nu era altul — nu putea fi altul la vremea aceea — decît Cristea Ion! De aceea mă întreb cu emoţia pe care mi-o dau amintirea fostului meu coleg şi marea admiraţie pentru el, dacă această relaţie cu remarcabila ei formă nu ar trebui, printr-un act de justiţie, să fie considerată teoremă şi să poarte numele prodigiosului ei descoperitor.

Aşa s-a derulat momentul II al întîlnirii mele întîmplătoare, pe tărîmul matematicii elementare, cu Cristea Ion, cel care îşi învăţa cursurile lucrînd pe noptiera sa din dormitorul de la căminul studenţesc şi bătînd în ea tactul unei melodii la modă sau improvizate de către el însuşi.

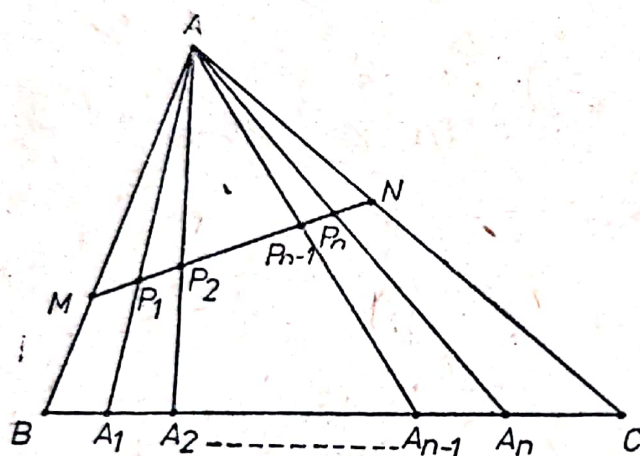


Fig. 15

Reamintindu-mi aceste lucruri de neuitat, m-am gîndit totodată să adaug o mică contribuţie a prezentului: generalizarea „frumoasei relaţii" pentru cazul în care prin vîrful $A$ al triunghiului se duc „$n$" ceviene. Dar cum „cine s-a ars cu ciorbă suflă şi-n iaurt" voi reproduce această generalizare nu înainte de a face menţiunea că este posibil să o fi făcut totuşi tot Cristea, mai ingenios desigur, în vreuna din publicaţiile pe care eu nu le-am consultat.

În figura 15, fie cevienele $AA_1, AA_2...AA_n$ unde $A_1, A_2...A_n \in (BC)$. Transversala $MN$, cu $M \in (AB)$ şi $N \in (AC)$, intersectează aceste ceviene în punctele $P_1 \in (AA_1) ... P_n \in (AA_n)$. Triunghiul $ABC$ luat succesiv cu cîte una dintre cele „n" ceviene, duce la tot atîtea relaţii de tipul lui (7) pe care însumîndu-le se obţine de către... cititor, relaţia generalizată

$$\frac{MB}{MA}(A_1C + ... A_nC) + \frac{NC}{NA}(A_1B + ... A_nB) = \tag{8}$$
$$= \left(\frac{P_1A_1}{P_1A} + ... \frac{P_nA_n}{P_nA}\right) \cdot BC$$

sau

$$\frac{MB}{MA} \cdot \sum_{i=1}^{n} A_iC + \frac{NC}{NA} \cdot \sum_{i=1}^{n} A_iB = BC \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{P_iA_i}{P_iA}$$

Închei aici... alunecarea pe-o transversală...

## 11. NU ADUCE ANUL CE ADUC ZECE ANI... SAU „DE LA UN ISOSCEL LA ALTUL"

Un pasionat rezolvitor de probleme din Institutul de Fizică București mi-a propus într-o zi de prin '69 următoarea problemă:

„Se dă un triunghi isoscel cu unghiul „solitar" egal cu 20°, în care se duc din vîrfurile de la bază drepte care fac cu aceasta unghiuri de 50° respectiv 60°. Să se calculeze unghiul pe care-l face cu una dintre laturile egale ale triunghiului, dreapta formată de intersecțiile acestor laturi cu cele două drepte duse prin extremitățile bazei".

Recunoașteți, acei dintre d-voastră care nu au întîlnit-o, ceea ce și eu am recunoscut imediat: are pe de-a-ntregul aerul unei probleme celebre. Aceasta la o primă privire! La a doua veți vedea că nu are doar aerul... Și mai are ceva! Are aparența că poate fi rezolvată ușor, fapt care m-a și făcut să o abordez urgent. Prin urmare m-am pus pe treabă crezînd că „n-am treabă" cu problema. Treabă am avut însă, chiar berechet, dar n-am avut și succes cu toate încercările mele repetate. În cele din urmă, cu durere în toate „unghiurile" (am vrut să spun „ungherele") sufletului, am abandonat...

Au trecut așa vreo zece ani pînă cînd un alt coleg mi-a readus sub ochi buclucașa problemă, făcîndu-mă să retrăiesc într-o clipă, înfiorat, toate încercările zadarnice de odinioară. Prima reacție a fost deci să mă descotorosesc de această problemă „diabolică". Se pare însă că este diabolică fără ghilimele căci nu am mai putut ieși din acest „ring cu trei colțuri" (cum spune Viorel Gh. Vodă în cartea cu același titlu), mai colțat decît altele și la propriu și la figurat.

Au urmat încercări peste încercări și deasupra alte încercări, uneori chiar cu prețul sacrificării timpului de la serviciu (...inadmisibil dar adevărat). Dădeam peste soluții aparente care apoi se destrămau ca într-un miraj matematic. De mai multe ori am avut aproape certitudinea că i-am găsit soluția printr-o construcție ajutătoare, dar ceea ce a fost bun în cazul acestora a fost faptul de a mă fi gîndit la o construcție ajutătoare...

În cele din urmă, enervat peste măsură și curios la culme, am cerut colegului soluția. O soluție care mi-a apărut deosebit

de frumoasă, motiv pentru care o voi reproduce cu toată admirația în cele ce urmează. În figura 16, pe care am marcat toate datele problemei, se construiește segmentul $BP$ cu $P \in (AC)$, care face cu dreapta $BC$ un unghi de 20°. Se observă imediat că triunghiurile $BCP$ și $BCN$ sînt isoscele. Prin urmare $(BP) \equiv (BC)$ și $(BN) \equiv \equiv (BC)$ din care rezultă $(BP) \equiv (BN)$, adică și triunghiul $BNP$ este isoscel, ba chiar echilateral, unghiul $NBP$ avînd măsura 60°. Deci $(BP) \equiv (NP)$ și cum $(BP) \equiv (MP)$ (din triunghiul isoscel $BMP$, unghiurile din $B$ și $M$ avînd cîte 40°) rezultă $(NP) \equiv (MP)$ și deci că triunghiul $MNP$ este isoscel. Dat fiind că unghiul din $P$ al acestui triunghi este de 40°, deducem că unghiul căutat, $NMP$, are măsura de 70°. O adevărată salbă de triunghiuri isoscele ne-a dus într-un mod cît se poate de elegant la rezolvarea frumoasei probleme. Și astfel cititorul a făcut cunoștință cu soluția clasică a problemei.

Dar împărtășind convingerea că o problemă, mai ales dacă este de geometrie, poate avea două sau mai multe soluții, și înspăimîntat de subtilitatea soluției care se cunoaștea, m-am ambiționat să găsesc una personală. În cele din urmă am găsit-o pe o cale mult mai accesibilă decît cea „clasică", după părereă mea astfel încît m-am mirat foarte că nu era aceasta cea cunoscută. Iată în continuare această soluție originală pe care sper ca și cititorul s-o găsească mai puțin „ascunsă" decît prima, deși chiar după părerea mea este mult mai puțin elegantă decît aceea. Are doar meritul de a fi alta și de a fi fost găsită printr-o muncă foarte susținută *

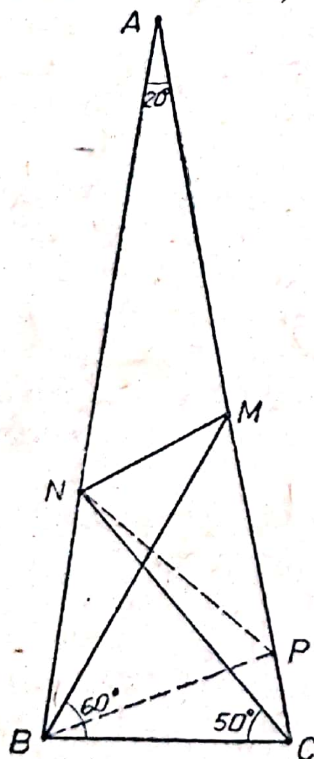


Fig. 16

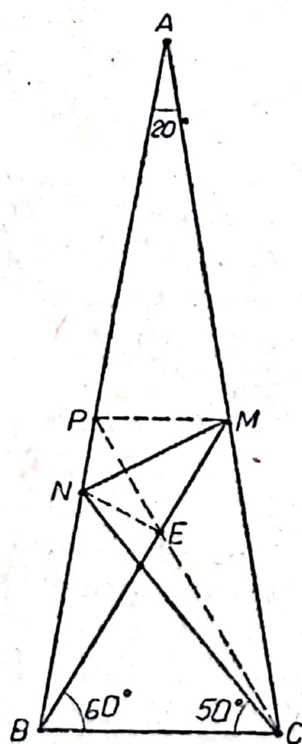


Fig. 17

Reluînd, în figura 17, triunghiul cu datele inițiale se construiește de data aceasta $MP \parallel BC$, apoi se unește $P$ cu $C$. Se disting imediat cele două triunghiuri echilaterale $BCE$ și $EMP$ unde $E = = BM \cap CP$. Rezultă de aici $(EM) \equiv (MP)$ și adăugînd că triunghiul $BEN$ este isoscel, $m(\widehat{BEN}) = m(\widehat{BNE}) = 80°$. În consecință $m(\widehat{MEN}) = 100°$. Dar tot 100° măsoară și

* Ulterior am găsit soluția identică în *Ingeniozitate și surpriză în matematică* de C. W. Trigg (1975), probl. 227. (n.a.).

$\widehat{MPN}$ astfel că în patrulaterul $EMPN$ avem: $(EM) \equiv (MP)$ şi $\widehat{MEN} \equiv \widehat{MPN}$, condiţii suficiente pentru a putea afirma că $(EN) \equiv (NP)$ (alt triunghi isoscel !) şi deci că diagonala $NM$ este bisectoarea $\widehat{PME}$. Prin urmare $NM$ face un unghi de 30° cu $PM$ şi de 70° cu $AC$.

Aici iau sfîrşit salturile noastre de la un isoscel la altul...

## 12. UN PĂTRAT DIN PATRU CERCURI... SAU „NU EXISTĂ PATRU PUNCTE OARECARE"

Acelaşi coleg care mi-a propus problema precedentă, mi-a mai propus una care întîmplător a avut tot o rezolvare în două reprize. Din fuzionarea acestor reprize a rezultat „explozia" soluţiei, căci a fost într-adevăr ca o explozie scăpărarea ideii care m-a dus la rezolvare. Aş zice chiar că „descoperirea" a rezultat printr-una din acele coincidenţe care se apropie de a fi suspecte.

„Pe laturile unui patrulater oarecare se construiesc pătrate. Să se arate că dreptele pe care se află centrele pătratelor construite pe laturi opuse ale patrulaterului sînt perpendiculare".

Ca şi cum ar fi avut interese sporite cu această problemă, colegul, care se ocupa de proiectare în viaţa de toate zilele, mi-a trasat chiar o figură pe calc, mare şi de o exactitate pe care pînă atunci geometria o avusese numai în închipuirea mea. Mi-am aşezat-o cît mai la vedere şi ori de cîte ori aveam prilejul o asediam pur şi simplu. Dar deşi simţeam că problema asta nu are dificultatea altora pe care le rezolvasem anterior, „ringul cu patru colţuri" rezista cu înverşunare. Făceam încercări privind figura din diferite unghiuri şi la diferite momente în speranţa că doar doar voi reuşi să surprind şi să... „prind" soluţia. Totul în zadar însă. Chiar şi după pauze de luni şi săptămîni, cu soluţia rămîneam la... sol. Incredibil şi totuşi adevărat că o problemă pe care o simţeam nu tocmai redutabilă, rezista în halul acesta.

Soluţia a venit în modul cel mai neaşteptat cu putinţă...

În manualul de clasa VI-a de geometrie am întîlnit următoarea problemă al cărei enunţ se remarcă de la prima ochire:

„Prin patru puncte necoliniare oarecare să se traseze un pătrat".

Soluţia acestei probleme, pe care o voi reproduce mai jos, este una dintre cele mai subtile şi elegante, perfectă şi simplă ca... perfecţiunea. Mai întîi se vede că vîrfurile pătratului căutat se situează pe cercurile construite pe laturile patrulaterului convex format de cele patru puncte (este evident că patrulaterul con-

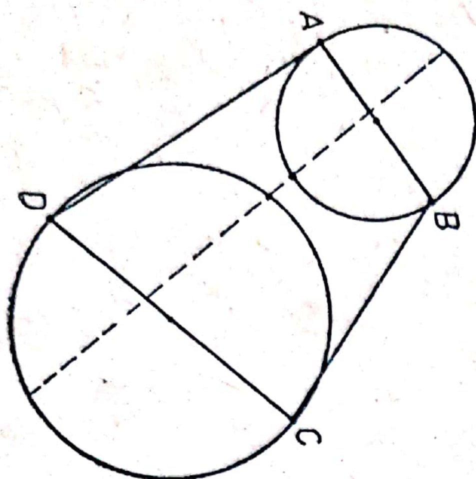



Fig. 18

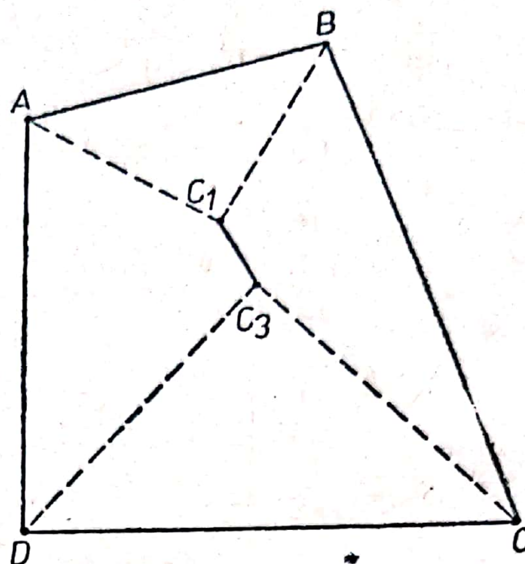



Fig. 19

cav nu intră în discuție), luate ca diametre (fig. 18). Este tot evident că oricare alte puncte de pe aceste cercuri (mai precis, semicercuri) constituie vîrfurile unor dreptunghiuri care trec și ele prin cele patru puncte date (deci există o infinitate de asemenea dreptunghiuri), dar numai cîte unul singur de pe fiecare semicerc participă la formarea unui pătrat (și numai unul !). Observația cheie care duce la rezolvare este aceea că diagonalele pătratului căutat (vezi fig. 18 unde $A$, $B$, $C$, $D$ sînt punctele date) trec prin mijloacele semicercurilor celorlalte, situate în interiorul patrulaterului format de cele patru puncte. Prin urmare pentru trasarea pătratului sînt necesare în ultimă instanță doar cercurile construite pe două laturi opuse, cercuri care determină o diagonală a pătratului (deci cele patru cercuri din titlu sînt de fapt două...).

Să revenim acum la problema care ne interesează și care după enunț, cel puțin la prima privire (care prea adesea ne lasă pradă inerției), nu pare a avea o strînsă legătură cu cea pe care tocmai am rezolvat-o. Și totuși, comparînd figura 19, corespunzînd problemei-obiectiv, cu cea aparținînd problemei auxiliare, observăm că rezolvarea primei este o consecință directă a rezolvării celei de-a doua (rezolvare pe care am luat-o din manualul de clasa VI-a amintit). Într-adevăr, dreptele care unesc centrele pătratelor opuse (fig. 19) nu sînt altele decît diagonalele pătratului pe care ni l-a dezvăluit frumoasa problemă cu care se confruntă azi elevii primului „an de geometrie" (pe vremea mea, o asemenea problemă era destinată cel puțin anului III de geometrie). Și cum diagonalele unui pătrat nu cunosc alt unghi între ele decît cel drept, drept e ca și noi să consemnăm rezolvarea problemei care și-a demascat pe cît de tîrziu pe atît de brusc soluția. Este o

rezolvare „ruşinos de simplă“ dar, după părerea mea, aceasta nu ţine de altceva decît de farmecul necurmat al geometriei.

Aşadar nu există patru puncte oarecare căci oricum le-am aşeza ele tot se află pe un pătrat...

## 13. „COMPASIUNEA“ COMPASULUI PENTRU RIGLĂ... SAU „O PROBLEMĂ DESCHIZĂTOARE DE CONSTRUCŢII“

Răsfoind cîndva nişte reviste de matematică şi fizică, seria B, de pe la începutul deceniului 6, reviste cu probleme foarte atrăgătoare, atenţia mi-a fost atrasă de una care exploda de noutate pentru mine: găsirea mijlocului distanţei dintre două puncte date, numai cu compasul. Clipe de neîntrecută încîntare matematică am petrecut în timp ce-i parcurgeam soluţia (trebuie să precizez că am întîlnit problema la capitolul „rezolvate“).

Dar să las să vorbească soluţia acestei probleme de maximă subtilitate şi frumuseţe. Voi reproduce această soluţie exact aşa cum este ea redată în Revista Matematică şi Fizică, anul III, septembrie 1952, p. 224, problema 265, nu înainte însă de a adresa, peste ani, felicitări pe toate cele... 360°, autorului memorabilei probleme: N. PATRULEA.

Dîndu-se două puncte $A$, $B$ (în revistă se scrie „un segment $AB$“ dar eu îmi permit, din... compasiune, să schimb puţin spre a exclude orice element geometric care să amintească oricît de puţin de riglă...), se poate construi (fig. 20) punctul $C$, coliniar cu ele, astfel ca $(AB) \equiv (BC)$. Numai cu compasul, bineînţeles! Îţi simt, cititorule, nerăbdarea de a afla cum anume şi-ţi spun dinainte că este vorba de o „manevră“ geometrică prea puţin, dacă nu chiar deloc folosită în zilele noastre. Procedeul stă la baza figurii 20 ca şi a lanţului de probleme de construcţii care vor urma. Cu piciorul compasului în $B$ şi cu raza $AB$ se descrie un arc de cerc

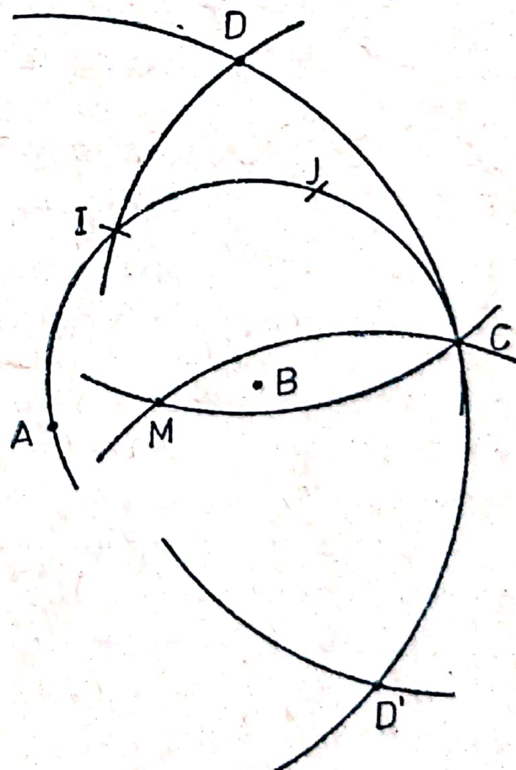


Fig. 20

pe care se poartă de trei ori coarda $AB$ (punctele $I$, $J$, $C$, fig. 20). Se îndoiește cineva de coliniaritatea punctelor $A$, $B$, $C$?

Se construiesc apoi cercurile $\mathcal{C}_1(A, AC)$ și $\mathcal{C}_2(C, CI)$ care se intersectează în $D$ și $D'$, simetrice în raport cu $AC$. Cercurile $\mathcal{C}(D, CD)$ și $\mathcal{C}(D', CD')$ se intersectează, în afară de „evidentul" $C$, în punctul $M$ care e punctul căutat. Într-adevăr, $CM$ fiind perpendiculară pe $DD'$ coincide ca direcție cu $AC$. Să scriem puterea punctului $A$ față de $\mathcal{C}(D, DC)$:

$$(1) \qquad AM \cdot AC = AD^2 - DC^2$$

Notăm $AB = a$ și deci: $AD^2 = AC^2 = 4a^2$; $DC^2 = CI^2 =$ (lat. tr. ech)$^2 = 3a^2$

$$(2) \qquad AM \cdot AC = 4a^2 - 3a^2 = a^2$$

și cum $AC = 2a$, rezultă $AM = \frac{1}{2}a$.

Asta este! De prisos orice comentariu în afară de acela că avem de-a face aici cu un act de compasiune a compasului pentru mult prea solicitata riglă... Vom vedea mai departe ce consecințe a declanșat această problemă pe care eu am inclus-o urgent printre cele antologice, neștiind că această includere o făcuse mult mai înainte și mult mai „apăsat", Gh. Buicliu în cartea sa *Probleme de construcții geometrice cu rigla și compasul*, Editura Tehnică, 1957.

## 14. DE LA „NAFTALINĂ" LA GAZETĂ... SAU „PRIMA MEA P.P.P. (PROBLEMĂ PROPUSĂ PUBLICATĂ)"

Fie-mi permisă o mărturisire: exact în clipa în care dactilografiam „PPP" am simțit năvalnica dorință ca cititorul să găsească această problemă de nota 10. Și o propunere: cu recunoștință să ne îndreptăm gîndul — un minut — spre cel care a inventat compasul... !

La foarte scurtă vreme după revelația problemei precedente, cînd tocmai mă străduiam să rezolv o problemă în care intervenea triunghiul dreptunghic format de bisectoarele, interioară și exterioară, duse dintr-un vîrf de triunghi, nu știu prin ce asociație geometrică mi-a venit în minte acea problemă care îmi subjugase admirația. Dintr-o sinteză aproape instantanee, avînd drept

componente diviziunea armonică* legată de triunghiul de mai sus și distanța „înjumătățită" numai cu compasul, s-a născut — cutremurîndu-mă parcă — întrebarea: oare dacă s-ar da trei puncte coliniare, nu s-ar putea găsi numai cu compasul cel de-al patrulea cu care să formeze o diviziune armonică? Trebuie să spun că abia am îndrăznit să mă gîndesc la această posibilitate. Construcția mi se părea a fi infinit mai complicată decît cea de la care pornisem, ba chiar imposibilă.

După cum se va vedea mai jos, „imposibilul" s-a dovedit posibil pînă la urmă. Astăzi însă eu nu îmi mai amintesc pe ce căi „raționamentale" am ajuns la soluție și nici ce factori m-au determinat ca după ce am așternut-o frumos pe hîrtie și am pus-o într-un plic împreună cu alte probleme propuse, pentru a fi trimise la R.M.F. (Rev. Mat. Fiz.), să las plicul să zacă netrimis timp de... peste 15 ani!? Fapt este că după acest timp considerabil, căutînd într-o zi printre hîrtii de altă natură, am dat peste acest plic care aștepta răbdător. Surpriza a fost enormă...

Din cele 13 probleme conținute în plic, 10 erau de renunțat, două de acceptat, iar una de... lăudat, am zis eu. Aceasta de pe urmă este chiar cea căreia îi fac această introducere. Este problema care, așa cum mă așteptam, a apărut în paginile Gazetei Matematice. Nu însă fără unele peripeții. Și cum peripețiile sînt într-un fel specialitatea acestei culegeri, să nu trecem peste ele!

Așadar am dactilografiat, am expediat și am așteptat... Am așteptat cam mult, gîndeam eu la un moment dat, uitînd de posibilitatea ca bieții redactori să fie realmente înecați de valurile de probleme propuse pe care le primesc din toată țara. Drept care curînd mă înfățișez la redacție. Îmi luasem pentru asta toate măsurile, inclusiv inima... în dinți.

Acolo se afla un tînăr redactor neverosimil de tînăr și cu o fizionomie aparte, de mare finețe. Asta îmi convenea, și-atunci nemaisimțind nevoia să-mi țin inima în dinți, mi-am făcut gura aproape cerc și am rostit ritos și „modest":

— V-am trimis cu cîtva timp în urmă, spre publicare, o problemă interesantă. Vă rog să-mi spuneți de ce se întîrzie apariția?

Tînărul redactor a rămas o clipă tăcut după care mi-a replicat, pe bună dreptate:

---

* O diviziune armonică constă în patru puncte coliniare dintre care două sînt capetele unui segment, iar celelalte, interior respectiv exterior segmentului, împart segmentul în același raport; se mai spune că ultimele două sînt conjugate armonic în raport cu primele (n.a.).

— Dacă toți cei care ne trimit probleme ar proceda ca d-voastră, unde am ajunge ?

Avea dreptate, mi-am dat seama, dar am continuat pe aceeași pantă a lipsei de modestie (de data asta fără să-mi dau seama) :

— Eu știu că v-am trimis o problemă excepțională, deci altfel s-ar pune problema pentru... problema în speță.

— Cum sună problema dvs. ? a zis dînsul neconvins, dar resemnat.

Am simțit cum îmi vine apa la moară. Am enunțat problema într-un mod aproape patetic.

— E prea grea ! a venit prompt răspunsul redactorului.

Un răspuns neașteptat, probabil ca rezultat al enervării pe care i-o provoca grozăvirea mea. Totuși i-am dat replica cuvenită logic, pe un ton ușor ironic :

— Știam că la Gazeta Matematică o problemă este cu atît mai căutată cu cît este mai grea... E însăși rațiunea de a fi a gazetei, după părerea mea.

— Haideți, mi-a zis concesiv interlocutorul, s-o căutăm prin dosarele astea !

Abia atunci am observat cele cîteva mese care erau literalmente invadate de prețioasele încărcături cu... încurcături. „Cînd văzui a lor mulțime, cîtă frunză cîtă iarbă" mi-am șoptit în grabă că poate nu era rău dacă-mi luam ceva hrană rece... Dar finul redactor mi-a dovedit neașteptat de repede că este „nașul" acestor șiruri nesfîrșite de dosare care mie — profan în probleme de redacție — mi-au desăvîrșit noțiunea de dezordine.

— Am găsit ! a exclamat dînsul ca o gazdă dată pe brazdă de atîtea insistențe ale unui oaspete nepoftit. Apoi fără a-mi da răgaz să-mi arăt bucuria : priviți, îl pun (se referea la manuscris) în acest dosar și asta înseamnă că în numărul 1 sau 2 din 1982 (eram în decembrie '81) va apărea.

Am mulțumit călduros și am plecat. Radios, firește !

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

În numărul 2—3 al Gazetei Matematice din 1982 apărea la nr. 19 101 problema care stătuse peste 15 ani la „naftalină". Am constatat însă repede — și neradios, firește — că îi lipsea steluța(? !) ceea ce însemna că soluția problemei respective nu va apărea niciodată în paginile gazetei... Am încercat să-mi explic. Singura explicație care-mi convenea era că în perioada aceea redacția nu dădea prea mare importanță problemelor de construcții. M-am consolat cu gîndul că poate această culegere va vedea lumina tiparului și odată cu ea soluția care îi va interesa pe unii cititori.

Și-acum, înainte de a ne înarma cu un bun compas spre a rezolva numai cu el problema enunțată mai jos, voi adăuga doar că mi-am pus și întrebarea dacă este rezolvabilă folosind de ase-

menea numai rigla. Răspunsul a fost afirmativ, astfel că problema s-a putut formula în felul următor (așa cum de altfel apare și în gazetă) :

„Se dau trei puncte coliniare $A$, $M$, $B$. Se cere să se găsească conjugatul armonic al lui $M$ în raport cu $A$ și $B$ în felul următor:

a) folosind numai compasul;

b) folosind numai rigla."

a) Oricît de originală ar fi această problemă, soluța va urma calea clasică. Prin urmare vom presupune că am găsit conjugatul

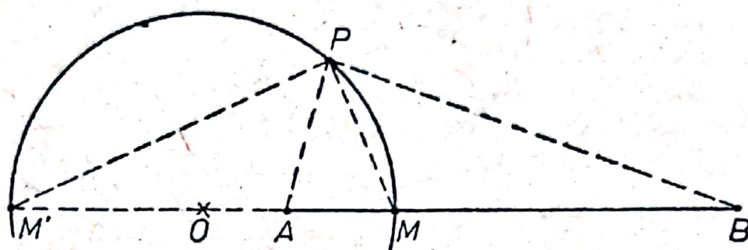



Fig. 21

armonic căutat, $M'$. Se știe că $M$ și $M'$ sînt capetele diametrului unui cerc ale cărui puncte au raportul distanțelor la $A$ și $B$ constant (fig. 21). Pentru cititorul care nu crede această afirmație, i-o propunem ca o problemă în... problemă,. Indicație : se umblă la sertarul cu locuri geometrice...

Cum $M'$ este unic determinat dacă se dă $M$, problema se reduce la găsirea centrului $O$ al cercului „evocat" mai sus. Primul pas, prima relație :

$$(1)\qquad \frac{M'A}{M'B} = \frac{MA}{MB} \rightarrow \frac{M'O + AO}{M'O + OM + MB} = \frac{MA}{MB}$$

Dar $M'O = OM = AO + MA$ și deci (1) devine :

$$(2)\qquad \frac{2\,OA + MA}{2\,OA + 2\,MA + MB} = \frac{MA}{MB}$$

de unde rezultă relația care — v-o spun de pe-acum — e „temelia" construcției :

$$(3)\qquad AO = \frac{MA^2}{MB - MA}$$

Vom arăta că folosind această expresie, dacă se dau $A$, $M$, $B$ coliniare, punctul $O$ poate fi construit-găsit numai cu compasul. Cu alte cuvinte, expresia (3) poate fi „construită". Deci din acest moment încep piruetele compasului... Din înlănțuirea lor va rezulta finalmente figura 22 — un veritabil „ciorchine".

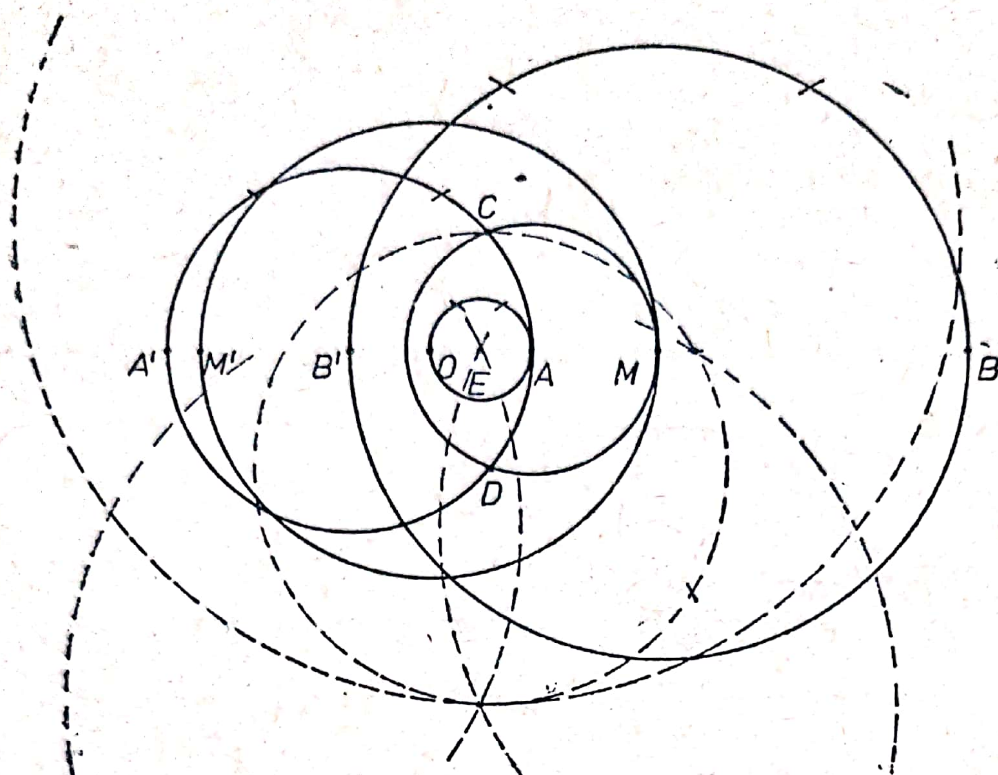



Fig. 22

Cu piciorul compasului în $M$ și cu deschiderea $MB$ descriem un arc de cerc pe care „purtînd“ raza de trei ori (ca la problema precedentă) se ajunge în punctul $B'$ diametral opus lui $B$ și deci coliniar cu punctele date. Se observă că $AB' = MB - MA$. Cu centrul în $B'$ și cu raza $AB'$ se descrie un cerc și, analog lui $B'$, se găsește $A'$, punctul diametral opus lui $A$, coliniar cu celelalte. Cercul cu centrul în $A$ și de rază $AM$ intersectează pe precedentul (cel cu centrul în $B'$) în punctele $C$ și $D$. Acum ne sare din nou în ajutor problema precedentă (nu degeaba am calificat-o drept deschizătoare de construcții !) cu ajutorul căreia găsim mijlocul $E$ al lui $(CD)$. Este evident că punctele $A$, $C$, $A'$ sînt vîrfurile unui triunghi dreptunghic în care $E$ este piciorul înălțimii din vîrful unghiului drept. Aplicînd teorema catetei și ținînd seama de relația (3)

$$(4) \qquad AE = \frac{AC^2}{AA'} = \frac{MA^2}{2(MB - MA)} = \frac{AO}{2}$$

Așadar am găsit mijlocul distanței de la $A$ la centrul cercului de diametru $MM'$. Relația (4) ne este acum „far călăuzitor“ pentru pasul următor : cu centrul în $E$ și cu raza $AE$ se descrie un cerc

pe care purtîndu-se raza de trei ori se găsește „doar cu compasul" punctul $O$, adică centrul cercului care ne va duce la punctul vizat (sau „visat" dacă ne gîndim la cei care n-au rezolvat încă problema din gazetă). Deci, prin același procedeu — aplicat a 6-a oară — cunoscînd $O$ și $M$ îl găsim pe $M'$ și problema este, în fine, rezolvată.

Să observăm că pentru rezolvarea acestei probleme am dispus de o cheie care este ea însăși rezolvarea unei probleme: dîndu-se două puncte, să se găsească, doar cu compasul, simetricul unuia în raport cu celălalt. Ne-a ajutat la rezolvare trio-ul: centru, semicerc, rază „aero-purtată". Dacă cititorul va găsi o altă cheie sau dacă folosind-o tot pe aceasta o va aplica de mai puține ori, voi fi primul care-i va „conjuga armonic" verbul cuvenit...

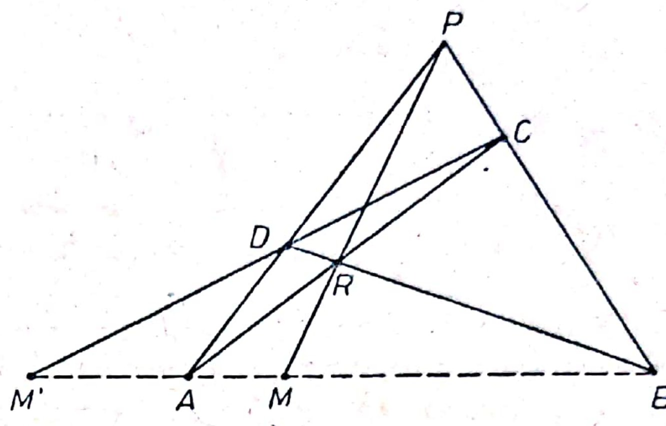



Fig. 23

b) Pe cît de laborioasă s-a dovedit rezolvarea punctului precedent, pe atît de „expresă" este rezolvarea lui (b), bineînțeles cu condiția să găsești un... punct de plecare. Fie acesta $P$, oarecare și exterior dreptei „imaginare" (de aceea am punctat-o) $AMB$ (fig. 23). Îl unim cu cele trei puncte date apoi luăm $R \in (MP)$. Ducem $AR$ pînă la intersecția cu $BP$ în $C$ apoi $BR$ pînă taie $AP$ în $D$. Dreapta $CD$ intersectează $AB$ în $M'$. Acesta este punctul căutat. Să verificăm!

Aplicînd teorema lui Ceva în triunghiul $ABP$, rezultă:

(1) $$\frac{MA}{MB} = \frac{CP}{CB} \cdot \frac{AD}{DP}$$

iar Menelaus în același triunghi, cu transversala $CM'$, duce la relația:

(2) $$\frac{M'A}{M'B} = \frac{CP}{CB} \cdot \frac{AD}{DP}$$

Ținînd seama de (1) se obține relația care semnifică rezolvarea:

(3) $$\frac{M'A}{M'B} = \frac{MA}{MB}$$

*Observație* : nici că se putea ceva mai simplu pentru cunoscătorii patrulaterului complet ; este acum cazul să mărturisesc că în momentul compunerii acestei probleme nu cunoșteam teorema lui Pappus a cărei demonstrație — identică cu cea de mai sus — a trebuit s-o „redescopăr" ...

## 15. CUM PUTEM JONGLA „LA INFINIT" CU COMPASUL... SAU „ÎMPĂRȚIREA DISTANȚEI DINTRE DOUĂ PUNCTE ÎN *n* PĂRȚI EGALE"

N-am să înțeleg niciodată de ce atunci cînd mi s-a dezvăluit spectaculoasa împărțire a segmentului în două părți egale, numai cu compasul, m-am gîndit la găsirea conjugatului armonic (vezi problema precedentă) și nu la împărțirea, tot numai cu compasul, a aceluiași în „$n$" părți egale („$n$" putînd ajunge la infinit, de unde și titlul acestor rînduri). Ar fi fost ceva foarte natural, mi se pare mie acum, și ceva mult mai facil, cum de altfel se va vedea. Mai mult decît atît, ideea de a generaliza seducătoarea construcție din '52 am avut-o cu doar vreo ... 20 de ani în urma celei „armonice". Dar să trecem peste asemenea curiozități probabil specific „rezolvitorești" !

Deci dîndu-se două puncte, $A$ și $B$, să se găsească o metodă de a împărți distanța dintre ele în „$n$" părți egale folosind numai compasul".

Înainte de a trece la „rezolvarea" generalizării să facem unele observații interesante și utile. Astfel, dacă știm să împărțim o distanță în două părți egale numai cu compasul, este clar că știm s-o facem și pentru 4, 8, 16, 32... părți egale. Totuși, sîntem departe de rezolvarea problemei pentru orice „$n$". De pildă o altă serie de valori pentru „$n$" se obține dacă știm să împărțim segmentul în trei părți egale ; rezultă astfel împărțirea în 9, 27, 81... părți egale. Pentru o primă împărțire în 5 părți egale vom avea 25, 125, 625... părți egale ș.a.m.d. Evident se pot face combinații ca de pildă : se împarte segmentul în două părți egale apoi cele două jumătăți în cîte trei părți fiecare, sau invers etc. Din aceste observații am înțeles la vremea respectivă că pentru a ajunge la o demonstrație clară în cazul „$n$" ar fi benefică demonstrația în cazul „3".

Observînd că pentru a împărți distanța $AB$ (mai bine zis segmentul $[AB]$) în două părți egale, numai cu compasul, a fost nevoie să se construiască un cerc de rază $AB$ și cu centrul în $B$, mi-am pus întrebarea : pentru a împărți același segment în trei părți egale, nu este cumva necesar încă un cerc, de data aceasta

cu centrul în $C$ (fig. 24) și de rază $CB$ ? Am construit acest cerc și, similar lui $C$, am obținut punctul $D$. Cu centrul în $D$ și cu raza $DI$ am construit un arc de cerc care a intersectat $\mathscr{C}(A, AD)$ în punctele $E$, $E'$. Apoi, întocmai ca la problema 13, cu centrele în $E$ și $E'$ am descris arce de cerc de raze egale cu $ED$, arce care se intersectează în $M$. A urmat o perioadă de mare tensiune: verificarea presupunerii că $M$ este punctul căutat.

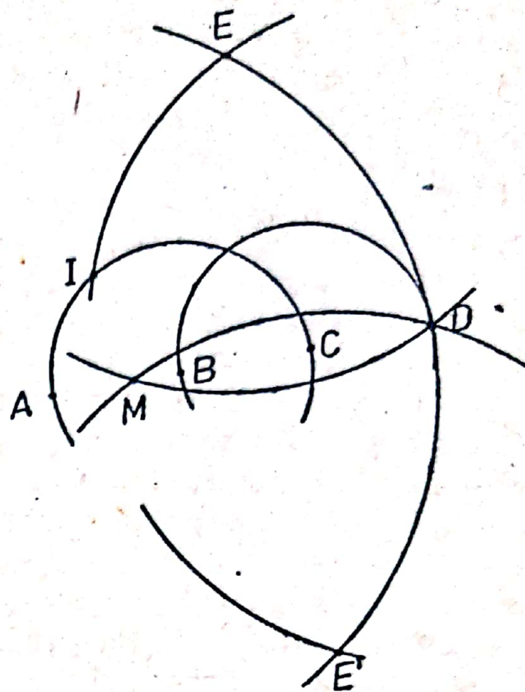


Fig. 24

Pentru verificare se arată că $\frac{MA}{MB} = 2$. În acest scop apelăm din nou la o „mică putere": puterea punctului $A$ față de $\mathscr{C}(E, ED)$ sau $\mathscr{C}(E', ED)$

(1) $$AM \cdot AD = AE^2 - R^2 = AE^2 - ED^2$$

unde $AD = 3\ AB$, $AE = AD = 3\ AB$ iar $ED = DI$ se calculează prin teorema cosinusului din triunghiul $ADI$ unde se opune unghiului din $A$ de 60°. Deci:

(2) $$ED^2 = DI^2 = 7\ AB^2 \leftrightarrow DI = \sqrt{7}\ AB$$

Efectuînd toate înlocuirile în relația (1) obținem în final:

(3) $$AM = \frac{2}{3} \cdot AB \leftrightarrow \frac{MA}{MB} = 2$$

relație care a pus capăt „pozitiv" marii mele tensiuni...

S-ar părea că de la $n = 3$ pînă la $n = \ldots n$ oricît de mare, trebuie să fie un salt cel puțin oricît de mare... Dar nu este așa după cum singuri vă puteți încredința. Luați de pildă pentru „$n$" o valoare „celebră de trei ori": 1001. Figura pe care o veți construi va consta dintr-un lanț de 1 000 de cercuri iar triunghiul de interes va avea unghiul din $A$ (fig. 24) tot de 60° însă latura corespunzătoare lui $AD$ de la cazul „3" devine „1001 $AB$". Extrapolînd deci, vom trece prin relații similare cu cele de mai sus și în final veți

găsi în particular $AM = \frac{1001 - 1}{1001} AB$ și în general $AM =$ $= \frac{n-1}{n} . AB.$

Cu aceste relații aș fi încheiat dacă nu m-aș teme că v-am rămas dator, cel puțin unora dintre d-voastră, cu o explicație: a faptului că numărul „1001" este, după mine, de trei ori celebru. De unde-i vine prima celebritate știe toată lumea așa că menționez doar formal izvorul respectiv: „1001 de nopți". Cea de-a doua pe care o știu toți bucureștenii, dar de care nu toți sînt conștienți, vine de la „1001 de articole", magazin din care în general lipsește articolul 1001, adică tocmai cel... căutat. În fine, cea de-a treia celebritate are o sursă pe care vreau să cred că eu am descoperit-o: descompunerea lui 1001 în factori primi! Priviți egalitatea $1001 =$ $= 7 \times 11 \times 13$ și spuneți-mi, vă rog, dacă știți alți factori primi mai „primi" decît aceștia (dacă aveți ezitări la „11" vă reamintesc eu de „cei 11 jucători", de „cei 11 metri" precum și de... mult mai puțin importanții „11 ani" ai ciclului activității solare).

Și totuși nu se încheie aici construcțiile realizate numai cu compasul, al căror șir a fost deschis de problema care — cu totul întîmplător — poartă numărul... 13 în această culegere.

## 16. „TREABA STRICĂ GRABA"... SAU „CIRCUMFERINȚA CARE-ȘI REGĂSEȘTE CENTRUL"

Nu, nu este greșit scris „treaba strică graba"! Imaginați-vă că mereu vă grăbiți la o treabă și, așa cum spune istețul proverb, mereu o stricați tocmai din cauza grabei. Azi așa, mîine-așa, păi pînă cînd? Vine o zi cînd v-ați săturat de atîta lucru stricat, stricați... graba și treaba iese bine. Se cheamă în acest caz că „treaba strică graba"? Dar să vedem ce vrea să zică titlul de mai sus inversînd topica acestui proverb!

Îmi zice cineva într-o zi:

— Bătrîne, poți să găsești centrul unui cerc numai cu compasul?

Întrebarea m-a cam... descentrat puțin la început. Apoi mi-am zis: ca să vezi pînă unde poate merge mintea căutătorului de probleme! Pleacă de la cea mai facilă construcție — a cercului cînd se dau centrul și... compasul — și ajunge, printr-o inversare ca-n proverbul de mai sus, la o problemă șocantă pînă la „descentrare". Căci îți dai repede seama de „saltul la antipozi" care se realizează: problema obținută astfel se anunță redutabilă. Și totuși...

Nerealizînd cîtuşi de puţin că mă aflu în faţa unei probleme celebre, mi-am permis să-i dau o rezolvare neverosimil de simplă (? !) Am ataşat-o apoi altor chestiuni privitoare la cerc şi am prezentat materialul unui alt redactor de la Gazeta Matematică. Acesta deşi pe moment s-a arătat entuziasmat îndeosebi de „circumferinţa care-şi regăseşte centrul", m-a sfătuit totuşi să consult cartea lui Gh. Buicliu, cea pe care am citat-o la problema 13. Simţea dumnealui ceva... M-am conformat prompt şi am găsit, într-adevăr, la pagina 14, cu numărul 5, cea mai simplă dintre soluţiile date problemei determinării, numai cu compasul, a centrului unei circumferinţe date. Incomparabil mai complicată decît soluţia dată de mine ! ... M-am umflat în pene tot atît de repede pe cît de repede aveam să mă dezumflu a doua zi cînd redactorul mi-a arătat că „celebra" mea rezolvare ascundea o banală eroare...

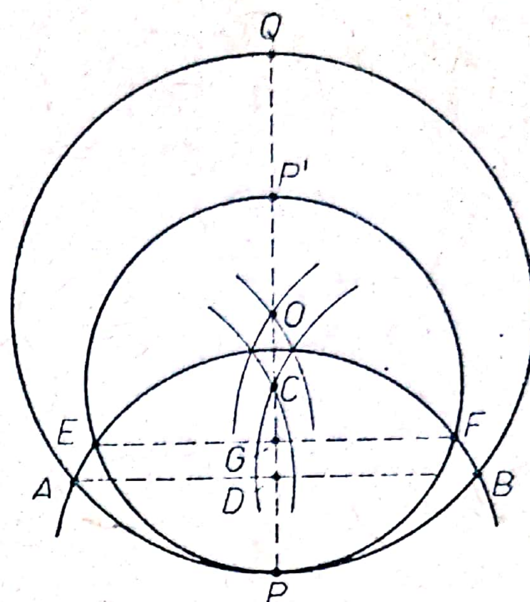


Fig. 25

Am înţeles în fine că problema „suferă" de celebritate, drept care acum reproduc pentru cititor soluţia extrasă din cartea susreamintită. Pe circumferinţa dată se ia un punct $P$. Cu centrul în acest punct şi cu o rază arbitrară se descrie un arc de cerc care taie circumferinţa dată în punctele $A$ şi $B$ (fig. 25). Atenţie ! „Raza arbitrară" se pretează la discuţii (eu am avut grijă să mi-o aleg convenabil). Cercurile $(A, AP)$ şi $(B, BP)$ se intersectează în $C$. E acesta centrul căutat? Nicidecum! Ar fi prea simplu, aşa că jonglăm mai departe cu noi cercuri. E rîndul lui $C$ să fie ridicat la rangul de „centru". I se dă şi o rază : $CP$. Cercul care ia naştere îl intersectează pe $\mathcal{C}(P, PA)$ în noi... poziţii avansate : punctele $E$ şi $F$. Noi puncte, noi centre, noi centre noi cercuri : $(E, EP)$ şi $(F, FP)$. Ar fi acum momentul ca unul dintre punctele în care aceste două cercuri se intersectează să fie cel care ne interesează. Să sperăm că $O$ va fi acest punct şi că verificarea ce urmează nu ne va face să disperăm... Şi-acum vă rog frumos să mă urmăriţi atent.

Pe figura noastră euclidiană (25) nimeni nu se îndoieşte că $PCO$ este o dreaptă şi în plus perpendiculară pe $AB$ şi $EF$. Această dreaptă taie a doua oară cercurile $(C, CP)$ şi circumferinţa dată

în punctele $P'$ respectiv $Q$. Triunghiurile dreptunghice $PAQ$ și $PEP'$, sub „acțiunea" teoremei catetei, duc la :

$$PA^2 = PD \cdot PQ \ ; \ PE^2 = PA^2 = PG \cdot PP' \tag{1}$$

$D$ fiind mijlocul lui $AB$ iar $G$ al lui $EF$. Dar, prin construcție, $C$ și $O$ sînt simetricele lui $P$ în raport cu $AB$ și respectiv $EF$. Prin urmare $PP' = 2\ PC = 4\ PD$ egalitate de care se ține seama în relația următoare (provenind din (1))

$$PD \cdot PQ = PG \cdot PP' \tag{2}$$

și care devine prin simplificări minore cu consecințe majore :

$$PQ = 2\ PO \tag{3}$$

unde am ținut seama și de $PG = \frac{PO}{2}$.

Numai pentru a îndeplini o formalitate voi spune acum că relația (3) îl ridică pe $O$ la rangul de „mare centru" adică este centrul regăsit de către Circumferința mumă... În încheierea celebrei construcții aș exclama : cam lung drumul la-ntors acasă !

Și-acum în speranța că ofer cititorului un exercițiu util, voi da și o soluție oarecum originală a mai-sus-rezolvatei probleme, bazată pe împărțirea în două numai cu compasul, a unui segment de dreaptă.

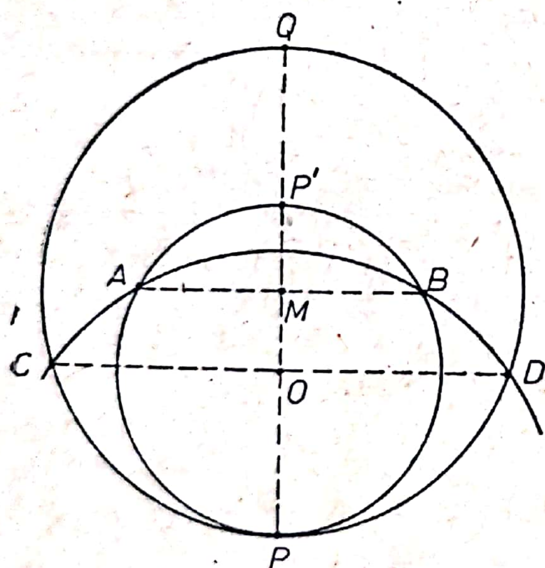


Fig. 26

Se pornește tot de la un punct oarecare $p$ de pe circumferința dată. Cu centrul în acest punct și cu o rază mai mică decît diametrul (fig. 26) se descrie un arc de cerc care intersectează circumferința dată în $A$ și $B$. Prin metoda cunoscută se găsește $M$, mijlocul segmentului $AB$. În continuare, cu centrul în $M$ și cu raza $MP$ se descrie un cerc care intersectează $\mathcal{C}(P, PA)$ în $C$ și $D$. Mijlocul distanței dintre $C$ și $D$ este centrul căutat, afirmație care se cere verificată „pe teren".

Fie $R$ raza circumferinței date, iar $P'$ și $Q$ punctele diametral opuse lui $P$ în aceasta respectiv în $\mathcal{C}(M, MP)$. Din triunghiul

dreptunghic $PAP'$, prin teorema catetei avem $R = \frac{PA^2}{2\ PM}$ iar din $\Delta\ PCQ$ prin aceeași teoremă, $PO = \frac{PA^2}{2\ PM}$. Rezultă $PO = R$, c.t.v. (ceea ce trebuia verificat).

O observație se impune : această construcție este mai simplă decît cea clasică, dar numai aparent ; dacă ne amintim că împărțirea unui segment în două părți egale, numai cu compasul, necesită o figură destul de complexă, ne dăm seama că dacă se aplică aceasta efectiv pentru $AB$ și $CD$, figura rezultată va fi cu mult mai „încercănată" decît cea reprodusă de către Buicliu în cartea sa (din păcate fără a ne dezvălui numele clasicului autor) ; se poate spune doar, întocmai ca la problema 11, că meritul acestei soluții este acela de a fi alta...

## 17. ULTIMELE AVENTURI (COMPAS)IONALE... SAU „CONSTRUCȚII DE PUNCTE IMPORTANTE ÎN TRIUNGHI"

Recapitulînd puțin, putem spune că am fost pînă acum martorii următoarelor isprăvi ale „egoistului" compas : segmentul înjumătățit ; segmentul „înterțit" ; segmentul cu conjugați armonici ; cercul „fericit" cu centru regăsit. Deci numai puncte coliniare și în final co-circumferențiale. Fără să vrei te întrebi ce surprize de același gen ne-ar aduce și un trio de puncte necoliniare.

Deci trei puncte necoliniare pe care „neapăratmente" le asociem în mintea noastră unui triunghi. Și ce sîntem tentați să construim numai cu compasul într-un triunghi în care sînt palpabile numai vîrfurile ? Am luat la întrebări punctele lui esențiale și iată — în esență — la ce răspunsuri am ajuns :

— Cu centrul cercului circumscris se petrece un lucru ciudat : problema găsirii lui numai cu compasul pare de nepus. Într-adevăr, să zicem că reușim să-l găsim pornind de la vîrfurile triunghiului. Aceasta ar însemna însă că putem rezolva problema centrului cercului căruia i se dă numai circumferința, căci n-am avea decît să luăm trei puncte pe acesta și... gata ! Dar am văzut la problema 16 că lucrul acesta nu se poate face decît pornind de la un singur punct de pe circumferința dată. La urma urmei de ce n-ar descoperi cititorul o nouă cale ?

— Succesul pentru ortocentru a fost stopat pe parcursul construcției, care începuse bine, astfel că n-am reușit să găsesc decît vîrfurile triunghiului ortic. Această reușită parțială a presupus următoarele operații : găsirea mijloacelor celor trei distanțe ;

ducerea cercurilor care au drept diametre laturile triunghiului; observația că punctele de intersecție ale acestor cercuri nu reprezintă altceva decît picioarele înălțimilor...

— În fine, un punct pentru care succesul a fost total: centrul de greutate. Iată, exclusiv orală, rezolvarea aceasta care este un model de „scurt și cuprinzător": se găsește mijlocul uneia dintre cele trei distanțe punîndu-se astfel baza medianei respective; mediana astfel „punctată" se împarte în trei părți egale (vezi problema 15) și... nu vă mai spun unde-i centrul de greutate.

— Plecînd de la problema C: 457 din „Gazeta Matematică" 12/1984 am deviat și am ajuns

La o „mare" constatare
Și plăcut surprinzătoare,

că tot numai „într-un picior" (am vrut să spun: cu compasul) se poate „construi" și PUNCTUL-LUI TORRICELLI (punctul de intersecție al cercurilor Torricelli — cercurile circumscrise triunghiurilor echilaterale construite pe laturile unui triunghi oarecare — sau „centrul izogon", adică punctul din care laturile triunghiului se văd sub unghiuri de 120° fiecare). Cu o figură (27) pe care punctele de interes sînt marcate accentuat, iar laturile se iau punctat — semn că există doar în imaginația noastră — se poate da acestei construcții o rezolvare orală de o limpezime totală. Urmăriți-i etapele distincte:

1) În prima etapă ne reamintim cine este și cum se obține punctul lui Torricelli din cercurile Torricelli (laturile triunghiului reprezintă pentru aceste cercuri laturile corespunzătoare ale triunghiurilor echilaterale înscrise în ele). În aceasta constă de fapt cheia problemei.

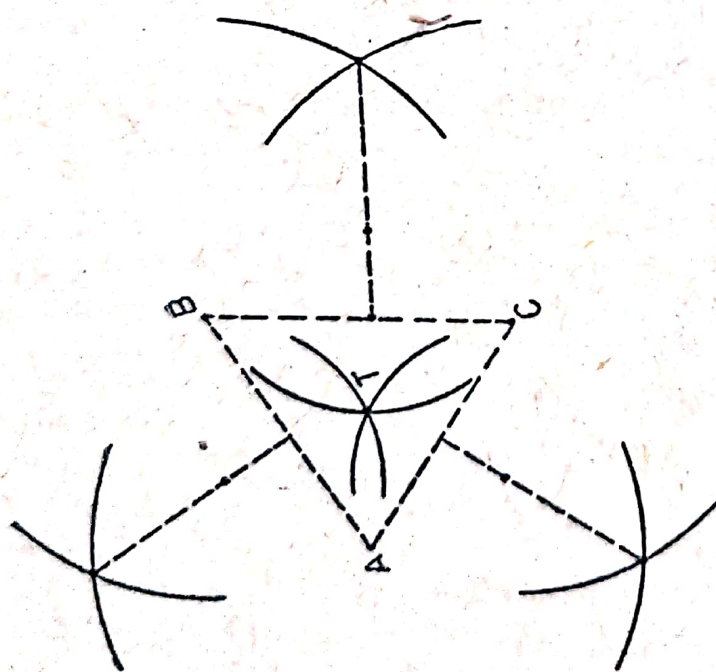


Fig. 27

2) Pornind de la fiecare „latură" a „trivîrfului" dat se găsește cel de-al treilea vîrf al triunghiului echilateral respectiv (este cineva care nu știe cum?), triunghi care ne va ajuta să găsim centrul cercului Torricelli;

3) Centrul cercului Torricelli îl găsim grație confundării sale cu centrul de greutate în „echilateral". Ori în găsiri de centre de greutate numai cu compasul sîntem acum experți...

4) Cele trei cercuri Torricelli pe care sîntem foarte în măsură să le trasăm, se intersectează în punctul care ne interesează: punctul lui Torricelli sau centrul izogon (era să scriu „izobar"...).

Așadar, pentru centrul de greutate succesul a fost de... greutate, adică total. Pentru ortocentru, cel puțin am ajuns la vîrfurile triunghiului ortic, iar pentru „circumscris" măcar s-au obținut picioarele mediatoarelor... Numai pentru centrul cercului înscris nu am... înscris nici cel mai mic pas spre găsirea lui cu arma noastră devenită atît de nesecretă. Și totuși!

Și totuși, pentru acest punct la fel de „distant" față de cele trei laturi ale triunghiului, se poate pune o problemă mai mult decît interesantă deși este condiționată de „cel mai mare dacă" din această carte. Iat-o:

Dacă știm să construim
Centrul cercului înscris,
În doi timpi și-un gest găsim
Centrul *H* și „circumscris"

Mai „pe românește" asta înseamnă că dacă am ști să construim numai cu compasul și centrul cercului înscris, am ști să le aflăm pe toate celelalte rămase inaccesibile: ortocentrul, centrul centrului circumscris și — surpriză centrală — centrul cercului lui Euler. Cum?

Pentru a răspunde la această monosilabică, dar polidificilă întrebare, va trebui să ne reamintim cîteva dintre proprietățile „mari" ale vedetei...

Cine nu-și amintește că ortocentrul unui triunghi este centrul cercului înscris în triunghiul ortic al acelui triunghi? Dacă totuși există un asemenea „uituc", apăi este imposibil ca el să nu știe cum se demonstrează acest lucru. Cine nu-și amintește care este dreapta cea mai bogată în puncte esențiale pentru triunghi? Dacă este cineva care nu știe că-i vorba de dreapta lui Euler (pe care se află ortocentrul, centrul cercului celor 9 puncte, centrul de greutate și centrul cercului circumscris), acela trebuie să abordeze urgent demonstrația prin care va afla și alte „amănunte esențiale" pentru rezolvarea catrenei-problemă. Iată „amănuntele":

— centrul de greutate *G* se află totdeauna între cel al cercului circumscris *O* și ortocentru *H*, la o treime de primul (își păstrează „năravul" căpătat la concurența medianelor);

— centrul cercului lui Euler $O'$ se află exact la jumătatea distanței dintre aceleași „centre extreme".

Prin urmare cel care face „corp" aparte, fiind exterior dreptei lui Euler, este centrul cercului înscris. Dar, ciudată proprietate (de fapt de mult nu mă mai miră nici o ciudățenie la triunghi), pornind tocmai de la el s-a putut obține, exclusiv în pas de compas, întregul cvartet de centre coliniare. Lucrurile s-au petrecut astfel :

1) S-a revenit la momentul în care se abandonase căutarea „compasională" a ortocentrului, adică la momentul găsirii vîrfurilor triunghiului ortic. Nu a trebuit decît să se construiască centrul cercului înscris în acest „ortic" — după metoda pe care n-o cunoaștem încă — fiindcă după reamintirile de mai sus acesta a fost chiar ortocentrul căutat ;

2) Centrul de greutate a „picat" imediat, așa că foarte repede s-a ajuns în posesia celei mai notabile drepte precum și a segmentului $HG$, care a constituit baza construcției ulterioare ;

3) Un calcul simplu pornind de la „amănuntele" descoperite mai sus, a dus la relația extrem de construibilă

$$GO = \frac{1}{2} . GH.$$

Prin urmare, aflînd mijlocul lui $GH$, $M$, apoi cu centrul în $G$ descriind cercul de rază $GM$, prin procedeul de-acum arhicunoscut, s-a găsit $O$, centrul cercului circumscris (... și-a rămas doar unul...)

4) Alt calcul simplu a arătat că

$$GO' = \frac{1}{4} . GH$$

și deci pentru a-l „construi" pe $O'$, centrul cercului lui Euler s-a găsit mijlocul lui $GM$, adică tocmai centrul cercului cu circumferința cea mai bogată în puncte particulare.

Iată deci că pornind de la centrul cercului înscris, pe de o parte, și de la centrul de greutate, pe de altă parte, am „construit" celelalte trei centre. Și astfel ajuns-am în faza observațiilor și a îndemnurilor. Să observăm deci că puteam porni și de la centrul cercului circumscris — găsit printr-o metodă tot necunoscută încă — și, via centrul de greutate, să obținem centrele $O$, $O'$, $H$, dar cum se ajunge de la $H$ la $I$ numai cititorul (poate) știe. Deci pînă una alta tot mai important este să știm cum se găsește „compasional" centrul cercului înscris. Înscrieți-vă la cuvînt !

Aici se încheie șirul de construcții deschis de problema... 13. Sper că acum, la capătul drumului, cititorul nu se consideră un ghinionist...

## 18. PROBLEMĂ CU RELAȚIE... SAU „A DOUA P.P.P. PERSONALĂ"

Firește, nu putea lipsi din această culegere o reprezentantă a genului de probleme poate cel mai răspîndit. Extrapolînd la maxim în această idee, n-am putea oare considera însăși demonstrarea diverselor teoreme ca fiind probleme în care se cere găsirea unor relații ?

Asemenea probleme, adesea dintre cele mai dificile, sînt totuși cel mai la îndemînă, astfel că nu întîmplător propunătorul începător se îndreaptă mai mult către ele. Într-adevăr, este mai greu să vezi, în „labirintul" unei figuri geometrice, o coliniaritate, o perpendicularitate, o congruență sau un loc geometric decît ca aplicînd diverse teoreme să stabilești o relație mai mult sau mai puțin subtilă. Și unde mai pui că de multe ori o asemenea relație se poate complica la nesfîrșit, combinînd relații după relații... Cea mai mare reușită se realizează cînd relația obținută este de simetrie maximă. În acest caz simți că în substratul ei se ascunde un adevăr geometric foarte armonios. Iar dacă pe lîngă calitatea de „armonioasă", relația obținută este și de mare întindere — infinită uneori — problema are tot ce-i trebuie ca să reușească spectaculos...

Mi-am început și eu „cariera" de propunător cu astfel de probleme. Am făcut în această direcție nenumărate încercări, unele chiar izbutite, ținînd mereu seama de o observație făcută de timpuriu : lipsa de simetrie a relațiilor „propuse" nu prea îmbie la rezolvarea unor astfel de probleme. Așa a rezultat problema pe care o supun „cercetării" cititorului și căreia îi redau soluția așa cum am redactat-o pentru Gazeta Matematică (unde a și apărut — cu steluță ! — în nr. 1 din 1983, la nr. 19 537).

În legătură cu această problemă am convingerea că poate fi încă mai mult „complicată" și că i se poate pretinde chiar un loc geometric... Iată deci că, de data aceasta, încă înainte de a-i derula soluția, am sugerat cititorului noi încercări inspirate de problema în chestiune.

Fie deci un enunț :

„O dreaptă variabilă trecînd prin centrul $O$ al unui cerc, intersectează tangentele la acest cerc duse dintr-un punct exterior $M$, în punctele $A$ și respectiv $B$. O tangentă variabilă la cerc intersectează $MA$ și $MB$ în $N$ și respectiv $P$. Dacă se notează cu $\alpha$

respectiv β rapoartele în care $A$ şi $B$ împart segmentele MN şi $MP$, să se arate că există următoarea relaţie:

$$\frac{1}{\alpha} MP + \frac{1}{\beta} MN = NP.“$$

Fie acum şi o soluţie.

Se notează cu $C$ şi $D$ punctele în care dreapta variabilă ce trece prin $O$ intersectează $NP$ şi paralela prin $M$ la această tangentă

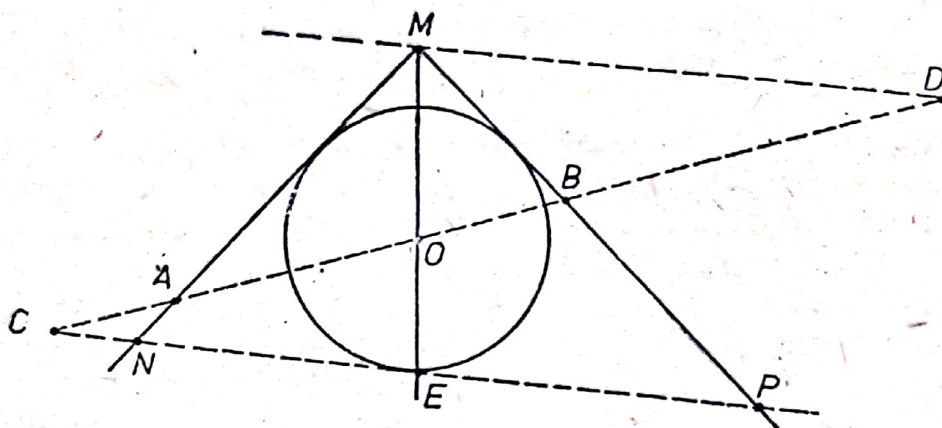



Fig. 28

(fig. 28). De asemenea, fie $E$ punctul în care $MO$ intersectează $NP$. Din triunghiurile asemenea $ACN$ şi $ADM$:

(1) $$\frac{AN}{AM} = \frac{CN}{MD}.$$

Din alte două triunghiuri asemenea, uşor de identificat,

(2) $$\frac{BP}{BM} = \frac{CP}{MD}.$$

Pentru a acumula cît mai multe date în vederea unor complexe combinaţii, mai depistăm o pereche de triunghiuri asemenea din care consemnăm

(3) $$\frac{OE}{OM} = \frac{CE}{MD}$$

şi ţinem seama că $O$ este intersecţia bisectoarelor triunghiului $MNP$ scriind:

(4) $$\frac{NE}{NM} = \frac{CE}{MD}$$ (o devenire a relaţiei 3).

Şi-acum fie prima combinaţie. Protagonişti, relaţiile (1) şi (4):

$$(5) \qquad \frac{AN}{AM}=\frac{CE}{MD}-\frac{NE}{MD}=\frac{NE}{NM}-\frac{NE}{MD}\leftrightarrow\frac{NE}{MD}=\frac{NE}{NM}-\frac{AN}{AM}.$$

Protagoniştii celei de-a doua combinaţii sînt relaţiile (2) şi (4) care duc la:

$$(6) \qquad \frac{BP}{BM}=\frac{CE}{MD}+\frac{EP}{MD}=\frac{NE}{NM}+\frac{EP}{MD}\leftrightarrow\frac{EP}{MD}=\frac{BP}{BM}-\frac{NE}{NM}.$$

Mergînd mai departe pe drumul rezolvării care în speţă nu este altul decît acela al „compunerii" problemei, adulmecăm noi posibilităţi de combinare. Unele „comunităţi" ale relaţiilor (5) şi (6) ne sugerează împărţirea acestora membru cu membru. Şi pentru că relaţia care rezultă este prea „simplă" o complexăm înlocuind pe $NE$ cu valoarea sa ca segment determinat de bisectoarea $[ME]$ pe $[NP]$ în $\Delta MNP$, adică $\frac{NP \cdot MN}{NM+MP}$. În acelaşi scop îl înlocuim pe $\frac{NE}{EP}$ cu egalul său $\frac{MN}{MP}$. La capătul unor calcule pe alocuri chiar „etajate", pe care le las cititorului, se obţine:

$$(7) \qquad MN \cdot \frac{BP}{BM}+MP \cdot \frac{AN}{AM}=\frac{NP \cdot NM}{MN+MP}+\frac{NP \cdot MP}{MN+MP}=NP.$$

Dar din enunţul problemei se ştie că $\frac{BM}{BP}=\beta$ şi $\frac{AM}{AN}=\alpha$ astfel că (7) devine

$$(8) \qquad \frac{1}{\alpha} \cdot MP+\frac{1}{\beta} \cdot MN=NP$$

relaţia cerută de problemă. Relaţie armonioasă, cale sinuoasă... Nu ştiu de ce această problemă îmi place chiar şi mie...

## 19. PUZDERIE DE DIVIZIUNI ARMONICE... SAU „TOTUL DESPRE TEOREMA LUI PAPPUS"

Cunoscuţi specialişti în matematică, precum N. N. Mihăileanu sau Viorel Gh. Vodă, consacră în cărţile lor pagini uneori aproape patetice patrulaterului complet. Eu care nu sînt decît un rezolvitor cu oarecare experienţă şi „oaremulte" păţanii, voi încerca să insist

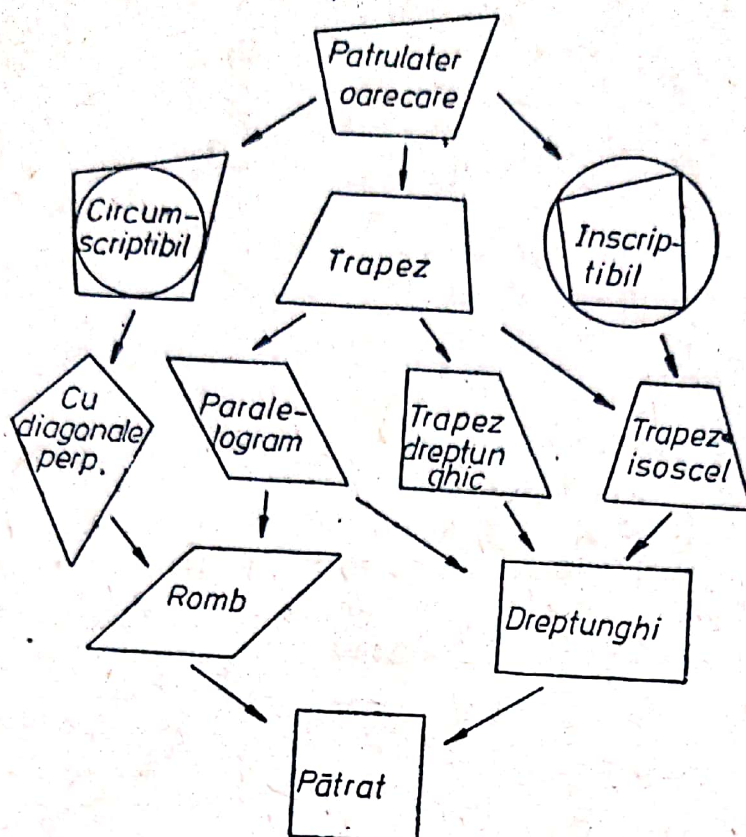



Fig. 29

în „cuvîntul“ meu asupra unei singure fețe a „patrucompletului“, față care are mai multe... fațete.

Înainte de a intra în subiectul propriu-zis simt nevoia să mărturisesc, cu frică aproape, că agreez mai mult patrulaterul decît triunghiul, cu toate că mă alătur celor care-l consideră pe acesta din urmă „vedeta geometriei elementare“. Pentru că, vedeți d-voastră, se „trage“ atît de mult pe această vedetă, cu probleme propuse și note matematice, încît adesea simt că trebuie să mă refugiez lîngă „triunghiurile siameze“* (că „între“ nu am loc de... diagonală), ca să nu mai vorbesc de faptul că „unde-s doi puterea crește...“. Se-nțelege că este vorba de patrulaterul „incomplet“ adică cel obișnuit sau convex. Ca expresie a adevărului că posibilitățile de lucru cu acesta se multiplică în raport cu cele pentru triunghi, dați-mi voie să reproduc un fel de „arbore genealogic“ al său extras dintr-un dicționar de matematică german (fig. 29). Este un tablou care pentru mine prezintă o mare încărcătură „emoțională“ prin redarea elocventă a bogăției formelor pe care le poate lua patrulaterul, ca și prin redarea aproape dinamică a

* Plastica expresie se datorează lui Viorel Gh. Vodă, în *SURPRIZE...* (n.a.).

trecerii de la o formă la alta. Iar ca expresie a preocupării mele pentru „soclul" vedetei amintite, este de menționat inconștienta ambiție pe care am avut-o la un moment dat de a scrie eu o „GEOMETRIA PATRULATERULUI". O și începusem prin încercarea de a rezolva următoarea problemă pe care o consideram „de elită" pentru cartea amintită :

„Presupunînd că vîrfurile unui patrulater absolut oarecare sînt prevăzute cu... articulații, să se arate că poate, sau nu poate, exista o deformare care să transforme patrulaterul dat într-unul inscriptibil".

Problema aceasta a rămas nerezolvată, iar proiectul acelei mult prea ambițioase cărți — pentru mine — a rămas în stadiul de... idee pentru alții, căci tare m-aș bucura dacă ar apărea un „Lalescu al patrulaterului". Cît privește problema propusă și abandonată, o pasez cu încredere anexei II.

Revenind la patrulaterul complet, să observăm mai întîi că „eroul nostru" cu aspect de modul lunar deformat la aselenizare, a luat naștere din ceea ce denumim patrulater concav (fig. 30) prin simpla prelungire a laturilor care fac un unghi mai mare decît 180°. Figura rezultată se regăsește în orice triunghi în care s-au dus două ceviene, fapt care mă îndrituiește să afirm că acest patrulater „aproape uitat" (cum îi spune V. Gh. Vodă) este totuși „aproape mereu prezent".

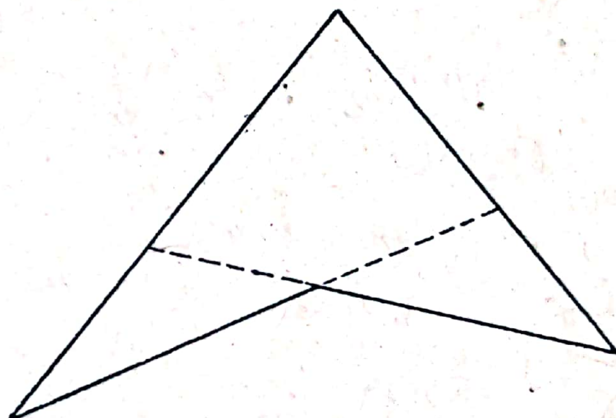


Fig. 30

După cum v-ați convins citindu-i pe autorii amintiți mai sus, proprietățile acestui patrulater mai puțin remarcat prin reviste sau culegeri, sînt de-a dreptul remarcabile. Dintre ele însă numai una — fața cu mai multe fațete — va face obiectul acestui „moment 19" al culegerrii : TEOREMA LUI PAPPUS. Iat-o :

„Într-un patrulater complet, o diagonală este intersectată de către celelalte două în puncte conjugate armonic în raport cu capetele ei".

Această proprietate-teoremă pe care vom avea ocazia s-o vedem aplicată cu succes rapid la cîteva probleme, va beneficia în cele ce urmează de o demonstrație diferită de aceea dată de către Gh. Țițeica în cartea sa „Probleme de geometrie" (Editura Tehnică,

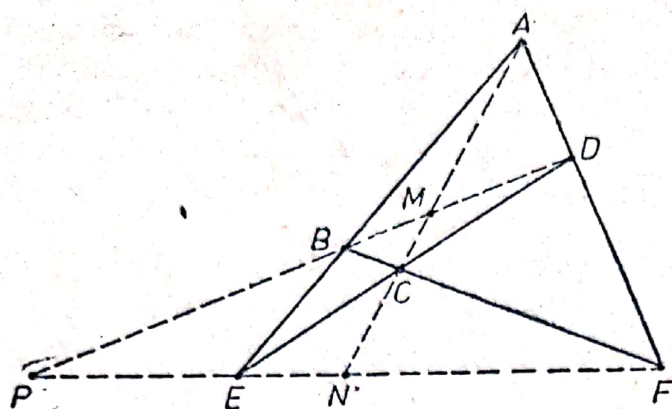


Fig. 31

1981, problema 1 161). Acolo se folosește noțiunea de „polară" pe care neîntîlnind-o în manualul actual de geometrie sintetică, nu o folosim nici noi. Demonstrațiile pentru cele trei diagonale vor fi într-o oarecare măsură diferite și de aici mai multele fațete de care vorbeam.

Fie patrulaterul complet *ABCDEF* (fig. 31) și *M*, *N*, *P*, punctele de intersecție ale celor trei diagonale. Cu un mic efort de memorie ne amintim că pentru „diagonala-bază" *EF* demonstrația am făcut-o deja la rezolvarea punctului (b) al problemei 14. Cum am procedat atunci ? Am evaluat *PE*/*PF* aplicînd „Menelaos" în $\Delta$ *AEF* cu transversala *BD*, iar raportul *NE*/*NF* prin „Ceva" în același triunghi (avînd punctul „cevian" *C*) și le-am găsit egale, c.t.d.

Pentru diagonala *BD* lucrurile-s mai încurcate oleacă și ne dau prilejul unei „descoperiri" nostime și unei definiții „senzaționale". În acest sens să observăm înainte de toate că patrulaterul complet *ABCDEF* poate fi considerat ca luînd naștere din triunghiul *ABD* care și-a ales un „punct cevian" *C* în afara suprafeței sale. Nu numai și-a ales acest punct, dar și-a dus și cele trei „ceviene" (*CA*, *CB*, *CD*) care intersectează laturile corespunzătoare în punctele *M*, *F*, *E* respectiv. Mai departe, dacă tot i-am atribuit lui *C* statutul de „cevian", să vedem dacă nu descoperim în patrulaterul complet astfel născut, o relație de tip „Ceva". Pentru aceasta detașăm din figura 31 pe cea a patrulaterului obținut

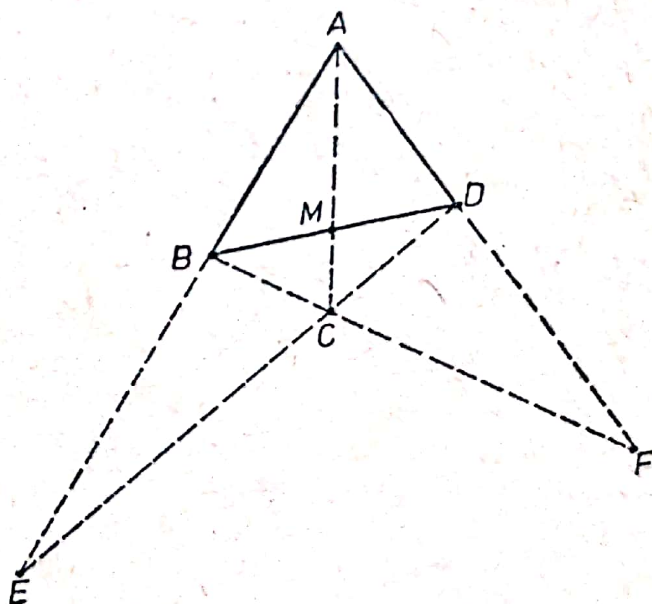


Fig. 32

prin „noul tip“ de ceviene (fig. 32). Prin teorema lui Menelaos, din $\Delta\, BDE$ „străpuns“ de $AC$ rezultă :

(1) $$\frac{MB}{MD} \cdot \frac{CD}{CE} \cdot \frac{EA}{AB} = 1.$$

Analog, din $\Delta\, ADE$ cu „săgeata“ $BC$, rezultă

(2) $$\frac{CD}{CE} \cdot \frac{EB}{AB} \cdot \frac{FA}{FD} = 1.$$

Din aceste două relații rezultă, prin împărțire, următoarea :

(3) $$\frac{MB}{MD} \cdot \frac{EA}{EB} \cdot \frac{FD}{FA} = 1$$

care este o relație de tip „Ceva“. Aceasta este „descoperirea“ nostimă pe care o anunțam și din ea decurge definiția „senzațională“ : patrulaterul complet este un... triunghi în care s-au dus cevienele trecînd printr-un punct exterior suprafeței sale sau este patrulaterul în care se aplică teorema lui... Ceva.

Lăsînd gluma la o parte (deși nu-i tocmai glumă definiția de mai sus), să mai observăm că relația (3) ne dă unul dintre rapoartele care ne interesează pentru demonstrarea teoremei lui Pappus în cazul diagonalei $BD$ : $\frac{MB}{MD}$. Pe celălalt, $\frac{PB}{PD}$, îl calculăm tot din triunghiul $ABD$, dar prin „Menelaos“ cu transversala $PE$ (fig. 31) (atenție, această transversală taie prelungirile tuturor laturilor triunghiului !) :

(4) $$\frac{PB}{PD} \cdot \frac{EA}{EB} \cdot \frac{FD}{FA} = 1$$

relație care împreună cu (3) conduce la „Pappus“ pentru diagonala $BD$ :

(5) $$\frac{MB}{MD} = \frac{PB}{PD}$$

A rămas diagonala $AC$ care de asemenea prezintă greutatea alegerii triunghiurilor și „săbiilor“ Menelaos respective. De fapt este vorba de un singur triunghi tăiat de „săbii“ diferite. Triunghiul este unul de marcă : cel determinat chiar de punctele de intersecție ale diagonalelor implicate, adică triunghiul $MNP$ (fig. 31). Drept primă transversală se ia $AE$ :

(6) $$\frac{MA}{AN} \cdot \frac{PB}{MB} \cdot \frac{NE}{PE} = 1.$$

Cea de-a doua transversală va fi „în persoana“ lui $BF$, astfel că :

$$(7) \qquad \frac{MC}{NC} \cdot \frac{PB}{MB} \cdot \frac{NF}{PF} = 1.$$

Din relația stabilită deja pentru prima diagonală, $\frac{PE}{PF} = \frac{NE}{NF}$ se obține

$$(8) \qquad \frac{NE}{PE} = \frac{NF}{PF}$$

de care se ține seama în (6) și (7) și rezultă ultima redută căzută

$$(9) \qquad \frac{MC}{NC} = \frac{MA}{NA} \Leftrightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{NA}{NC}.$$

Și iată acum bilanțul diviziunilor armonice pe care le-am stabilit : ($A$, $M$, $C$, $N$), ($D$, $M$, $B$, $P$), ($F$, $N$, $E$, $P$). Deci numai trei, ceea ce nu prea justifică slova „puzderie“ din titlu. Pentru a o justifica totuși să observăm că patrulaterul nostru complet face parte împreună cu altele ușor detectabile, din triunghiul $AEF$ în care s-au dus cevienele concurente în $C$. Așa stînd lucrurile, este lesne de văzut că putem „extrage“ alte două „complete“ pentru care găsim alte șiruri de diviziuni armonice. În total 9 care dacă nu este nici el un număr prea mare, cel puțin este un număr care place... muzelor. Sper să fi plăcut și cititorului cele „povestite“ pînă aici. În încheiere o atenționare : să ținem bine minte teorema lui Pappus căci vom „ataca“ cu ea problemele, prima și a doua, care urmează.

## 20. „FRUNCEA“ PROBLEMELOR DE GEOMETRIE... SAU „UN LOC GEOMETRIC NU PREA LA VEDERE“

Toată „lumea matematică“ știe perfect ce-i acela un „loc geometric“. Dar ce poate fi un loc geometric pentru cealaltă lume (nu, nu lumea cealaltă !), nematematică la propriu sau chiar la figurat ? Iată cîteva posibile interpretări :

— loc de dans pentru arta matematică a unora ;
— loc de luptă pentru cei ce plonjează în acest domeniu ;
— loc de supliciu pentru cei netalentați în acest domeniu ;
— loc de expus artă abstractă, pentru cei încă mai netalentați ;
— loc de „închinat“ pentru cei ce se miră pînă ce transpiră... ;
— loc „deloc“ pentru cei respinși la admitere ;

— loc de veci pentru cei respinși la a $n$-a admitere... ;
— loc de foc pentru cei pasionați de geometrie ;
— loc cu foc pentru cei apasionați de geometrie etc.

Oare s-ar mai putea spune ceva ? În orice caz eu mă opresc aici și vă dau d-voastră cuvîntul pentru a continua...

Cititorul și-a dat desigur seama că toată această înșiruire, poate nu totdeauna la obiect, din care am omis „loc cu ghinion" pentru problema 20, nu are alt scop decît acela de a demonstra că problemele de loc geometric sînt „fruncea" problemelor de geometrie. După părerea mea, o asemenea problemă, într-un „peisaj" de probleme, captează atenția tot astfel cum ne este atrasă privirea de către firul de floarea-soarelui într-un lan de ce vreți... Iată de ce nu am ocolit niciodată aceste probleme, ba chiar le-am căutat cu pasiune și m-am dedicat rezolvării lor uneori pînă la ultimă picătură de energie, așa cum de altfel s-au petrecut lucrurile și cu problema care urmează.

Problema, în ciuda enunțului care nu anunța dificultăți prea mari, s-a dovedit redutabilă, rezistînd — este... locul să mărturisesc — la toate asalturile mele pur geometrice, asalturi echivalente cu mulți metri cubi de vagoane descărcate... Mi-a venit în ajutor „tîrgcumetria" cu trigonometria, această modestă, dar prețioasă auxiliară a geometriei. Dar să „denunțăm" enunțul.

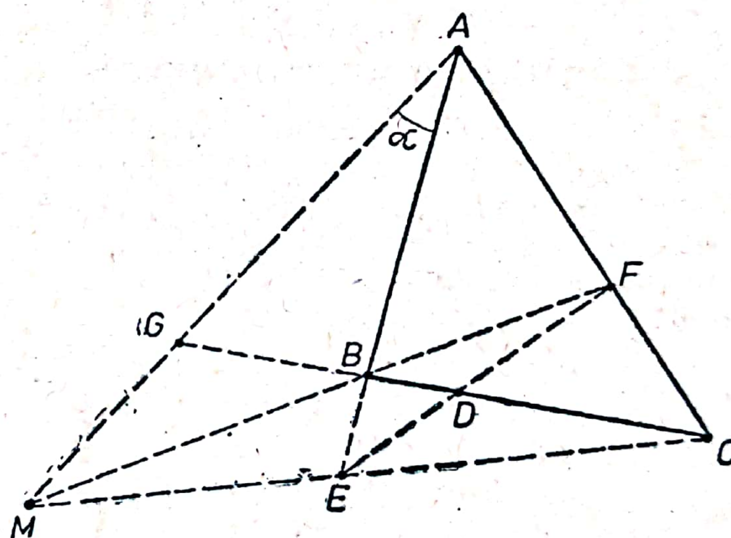



Fig. 33

„Se dă triunghiul oarecare $ABC$ cu un punct fix $D$ pe $BC$. Prin $D$ se duce o dreaptă variabilă care taie $AB$ și $AC$ în $E$ respectiv $F$. Prelungirile segmentelor $BF$ și $CE$ se intersectează în $M$. Se cere locul geometric al lui $M$."

Nu este nevoie să ai neapărat în față figura 33 pentru a-ți da seama că nu-l poți ocoli pe Menelaos. Din $\Delta\, ABC$ cu transversala $EF$, prea cunoscuta teoremă dă :

$$\frac{AF}{CF}\cdot\frac{CD}{BD}\cdot\frac{BE}{AE}=1 \qquad (1)$$

iar din $\Delta$ $AEC$ cu transversala $BF$

$$\frac{AF}{CF} \cdot \frac{CM}{EM} \cdot \frac{BE}{AB} = 1. \tag{2}$$

Împărțind relațiile (1) și (2) membru cu membru și ținînd seama că $\frac{BD}{CD} = \text{const.}$ :

$$\frac{AE}{EM} \cdot CM = \text{const.} \tag{3}$$

Din acest moment probabil că numai cititorul știe să meargă mai departe pe această cale. În ce mă privește, a trebuit să cochetez cu trigonometria și, grație teoremei sinusurilor, am stabilit din triunghiul $AEM$ relația :

$$\frac{AE}{EM} = \frac{\sin \widehat{AME}}{\sin \alpha} \tag{4}$$

iar din $\Delta$ $ACM$, prin aceeași teoremă :

$$\frac{CM}{AC} = \frac{\sin (A + \alpha)}{\sin \widehat{AME}}. \tag{5}$$

Din ultimele două relații, prin uzuala operație de înmulțire, rezultă

$$\frac{\sin (A + \alpha)}{\sin \alpha} = \text{const.} \tag{6}$$

în care este implicată și relația (3) de la „răscruce de drumuri..."

Din relația (6) rezultă că $\alpha$ este unghi cu măsură constantă și deci locul geometric căutat este o dreaptă care trece prin $A$ și face unghiul $\alpha$ (calculabil) cu $AB$. Astfel am pus punct acestei soluții pentru care am pierdut orele mai abitir decît la... O.R.L, dar nu am pus punct și problemei...

Printre elevii claselor I circulau pe vremuri aceste versuri-ghicitoare, care nu știu dacă mai circulă și astăzi :

Cîmpu-i alb, oile-s negre,
Cin' le vede nu le crede,
Cin' le paște
Le cunoaște...

Era vorba — la propriu — de cunoașterea literelor și desigur — la figurat — de știința de carte în general.

Pornind de la această amintire duioasă, cu efect nostalgic, într-un moment în care mă confruntam cu problemele ultime de mai sus, mi-am dat seama că versurile evocate se potrivesc foarte bine și teoremelor... Într-adevăr, a rezultat din soluția pe care tocmai am reprodus-o, ce am putut păți dacă am văzut doar (în „Mic memorator de matematică" de Gh. Th. Gheorghiu, 1972), fără să fi „păscut", o teoremă care duce rapid și elegant la găsirea „locului geometric nu prea la vedere" de mai sus. „Miraculoasa" teoremă am fost „păscut-o" în cele din urmă chiar pe „domeniile" problemei 19 și deci nu este alta decît „armonioasa" teoremă a lui Pappus. Cu ajutorul ei voi da o a doua soluție problemei în speță, o soluție care va pleda irezistibil pentru utilitatea cunoașterii acestei teoreme pe scară mai largă decît în prezent.

Fie $G = AM \cap BC$ (fig. 33). Se consideră patrulaterul complet $CFBEAM$ în care $D$ și $G$ sînt punctele de intersecție ale diagonalei $BC$ cu celelalte două diagonale. Apelăm acum la recenta noastră cunoștință, teorema lui Pappus :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{GB}{GC} \qquad (7)$$

relație din care rezultă $\frac{GB}{GC}$ = const. și deci că $G$ este punct fix. Așadar $M$ „domiciliază" pe dreapta fixă $AG$ care este locul geometric căutat. Incredibil, dar teribil ! Cu o singură relație s-a realizat cît cu șapte pe calea inițială... Alte comentarii sînt de-a dreptul de prisos.

Acum că am dat și o rezolvare pur geometrică, ce s-ar mai putea face de către... cititor ? Să se discute „locul" în funcție de : orientarea dreptei variabile ce trece prin $D$ ; poziția punctului $D$ în raport cu segmentul $BC$. De asemenea, poate ar fi interesant să se vadă cum se extinde locul geometric al lui $M$ în cazul în care nu numai dreapta $EF$ își schimbă orientarea, ci și $D$ poziția, ambele schimbări producîndu-se în același timp. La revedere, pe curînd, Pappus.

## 21. TREI ÎNTR-O DREAPTĂ... SAU „COLINIARITATE CU PAPPUS"

Am prezentat cîndva redacției Gazetei Matematice următoarea problemă propusă personală :

„Într-un patrulater inscriptibil, avînd două laturi alăturate egale, punctele în care se întîlnesc laturile opuse sînt coliniare cu punctul de intersecție al bazei isoscelului cu perpendiculara în vîrful exterior isoscelului, pe diagonala respectivă".

Deci o problemă nici prea grea nici prea ușoară, cu un inscriptibil avînd două laturi văzute la fel „de la centru". Redactorul însă nu a văzut-o la fel ca pe celelalte (care au fost reținute) spunînd că este asemănătoare cu una publicată cîndva. Firește i-am dat dreptate dar am păstrat problema pentru orice eventualitate. Și iată că acum a sosit prilejul s-o folosesc.

Cu mijloacele matematice stăpînite la vremea compunerii acestei probleme, a rezultat o soluție în genul primeia de la problema precedentă. Deși mai puțin întinsă decît aceea, nu este cazul să mai fie reprodusă, neprezentînd „încurcăturile" care să merite așa-ceva. Atunci ce mă determină să aduc sub ochii cititorului această primă problemă de coliniaritate ? Numai și numai faptul că așa cum în problema precedentă am găsit rapid un loc geometric cu ajutorul teoremei lui Pappus, tot astfel în problema aci de față, cu aceeași teoremă, vom acredita o coliniaritate.

În figura 34 fie: $(BC)\equiv(CD)$; $M=AB\cap CD$; $N=AD\cap BC$; $P=BD\cap$ perpendiculara pe $AC$ în $A$; $E=AC\cap MN$. Mai departe, vom profita de faptul că matematica, în măsura în care poate fi

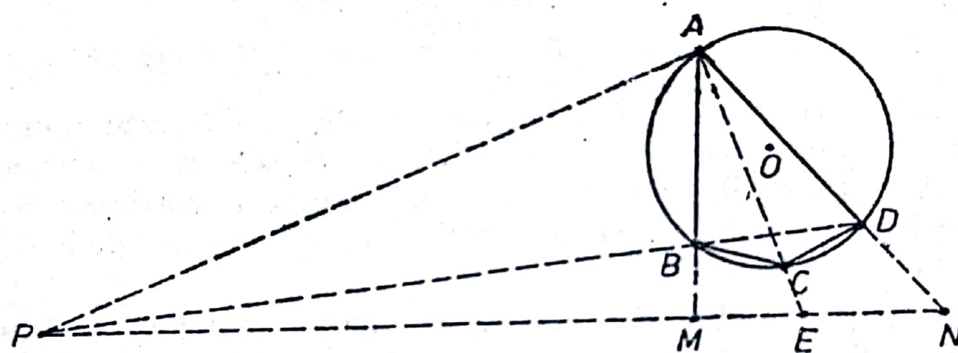



**Fig. 34**

considerată artă, este singura care folosește cu succes „absurdul": în bine cunoscuta sa metodă „reducerea la absurd". Astfel vom presupune că $P$ nu este coliniar cu $M$ și $N$ și deci vor exista $P'=$ $=AP\cap MN$ și $P''=BD\cap MN$. Dacă așa ar sta lucrurile, observînd că în triunghiul $AMN$ segmentul $AE$ este bisectoare interioară, iar $AP'$ bisectoare exterioară ($AP'\perp AE$), am putea scrie relația

$$\text{(1)} \qquad \frac{EM}{EN}=\frac{P'M}{P'N}=\frac{AM}{AN}$$

care rezultă din aplicarea teoremei bisectoarei, celor două „surori". În aceeași accepțiune, din patrulaterul complet $ABCDMN$, prin teorema lui Pappus am scrie:

$$\text{(2)} \qquad \frac{EM}{EN}=\frac{P''M}{P''N}$$

Din relațiile (1) și (2) ar rezulta — nu mai scriem o nouă relație — că punctele $P'$ și $P''$ coincid în $P$, ceea ce coincide cu rezolvarea problemei propuse.

După rezolvarea rapidă a unui loc geometric și a unei coliniarități, poate ar fi interesantă și abordarea unei concurențe prin „Pappus", dar parcă se simte nevoia unei pauze de geometrie...

## 22. PROCEDEE CU PROCENTE ÎN PROCESE CHIMICE... SAU „SINGURA PROBLEMĂ DE CHIMIE"

Hazardul care a guvernat „impacturile" mele cu diferite probleme de matematică sau fizică, nu m-a ocolit nici în privința chimiei. Ce-i drept n-a făcut-o prea des, drept care nu am prea mult de scotocit ca să găsesc urmele acelor impacturi. Iar dintre acestea numai una a trecut cu succes examenul de „distilare" la care au fost supuse pentru a promova în această culegere.

Cînd solicitarea întîmplătoare a bătut la ușa mea sub chipul problemei care va urma, i-am deschis înfricoșat, nefiind înarmat cu arma experienței. Și bine am făcut că i-am deschis, căci pînă la urmă am avut parte de prima... parte a pitorescului proverb chinezesc : „mai bine să vezi o pisică și să crezi că-i lup, decît să vezi un lup și să crezi că-i pisică".

Dar iată enunțul problemei (era să zic al „pisicii" !) :

„Se dă compoziția procentuală de masă a unui amestec : $P_A+P_B+P_C+ ... =100\%$ (grame). Componentele amestecului au greutățile atomice (sau moleculare) respective : $M_A$, $M_B$, $M_C$, ... Să se stabilească formula generală pentru a se calcula compoziția procentuală atomică a amestecului : $A+B+C+ ... =100\%$ (atomi). Cu alte cuvinte, să se determine $A=f(P_A)$, $B=f(P_B)$ etc."

Soluția problemei (a se citi „rezolvarea problemei" nu „dizolvarea problemei" !) impune precizarea, inițial, a două mărimi cu care vom opera : procentul de masă care este numărul de grame ($P_A$) dintr-o specie care se află în 100 g de amestec ; procentul atomic, numărul de atomi ($A$) dintr-o specie care se află în 100 atomi de amestec.

Fie deci cantitatea de 100 g amestec. Evident va exista relația :

(1) $$P_A+P_B+P_C+ ... = 100 \text{ g}.$$

Dar procentul $P_A$, de pildă, înseamnă prezența în amestec a $N_A$ atomi din specia respectivă. Între această nouă mărime și $P_A$, $M_A$ se stabilește o relație „de viitor"

(2) $$P_A=N_A\cdot M_A\cdot \alpha$$

unde $\alpha$ este, evident și nu prea, masa uneia din cele 12 „feliuțe" egale în care am împărțit izotopul $^{12}_{6}C$. Firește, relații analoage vor exista pentru $P_B$, $P_C$... Ținînd seama de aceste relații (2), numărul de atomi din cele 100 g amestec va fi dat de expresia :

$$(3) \qquad N_A+N_B+\ldots=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{P_A}{M_A}+\frac{P_B}{M_B}+\ldots\right)$$

Soluția noastră a ajuns la asemenea concentrații de date încît ne putem permite acum, prin străvechea regulă de trei simplă, să calculăm gramele ce revin la 100 atomi de amestec. Numărul lor este dat de :

$$(4) \qquad x=\frac{10^4\cdot\alpha}{P_A/M_A+P_B/M_B+\ldots}$$

mărime care ne permite să aflăm numărul de grupe de cîte 100 atomi de amestec, grupe care intră în cele 100 g de amestec aflate în discuție (și în soluție !) :

$$(5) \qquad n_{100}=\frac{P_A/M_A+P_B/M_B+\ldots}{100\cdot\alpha}.$$

La același rezultat se ajunge și prin însumarea grupelor de cîte 100 atomi care intră în fiecare componentă, adică : avem un prilej să verificăm (un fel de probă) „probitatea" procedeelor cu procente practicate în problemă. Ar urma deci :

$$(6) \qquad \frac{P_A(P_A/M_A+\ldots)}{10^4\cdot\alpha}+\frac{P_B(P_A/M_A+\ldots)}{10^4\cdot\alpha}+\ldots= =\frac{P_A/M_A+P_B/M_B+\ldots}{100\ \alpha}$$

Înmulțind acest număr de „sutare" cu ... 100, se obține numărul de atomi din cele 100 g amestec, număr de la care am pornit : $\frac{1}{\alpha}\left(\frac{P_A}{M_A}+\frac{P_B}{M_B}+\ldots\right)$. Și dacă tot l-am obținut din nou, să-l supunem din nou unei reguli de trei simplă în scopul de a găsi relațiile care ne dau, așa cum cere problema, procentele atomice ale componentelor : $A$, $B$, $C$, ... Din întreit respect pentru această regulă (veche, valoroasă, veșnic valabilă), îi redau schema completă :

$\frac{P_A}{\alpha M_A}$ atomi ai componentei „$A$" . . . . . . . . ... $\frac{1}{\alpha}\left(\frac{P_A}{M_A}+\frac{P_B}{M_B}+\ldots\right.$ atomi de amestec

$A$ atomi . . . . . . . . . . 100 atomi din amestec

din care schemă se obțin relațiile căutate :

$$(7) \qquad A=\frac{10^2\cdot P_A}{M_A(P_A/M_A+P_B/M_B+\ldots)}\ ; \quad B=\ldots\ ; \quad C=\ldots$$

Iată niște formule cu adevărat magice... Se pleacă de la procente și mase atomice și, cu ajutorul acestor formule, se evaluează numere de atomi mai mici decît 100 ! Ce ar putea pleda mai elocvent pentru frumusețea chimiei ?

## 23. PROCEDEE CU PROCENTE ÎN PROBLEME DE ÎMPRUMUT... SAU „PROBLEMĂ DE CALCUL AL UNEI DOBÎNZI"

Lucrul cu procente la rezolvarea problemei de mai sus mi-a amintit de o problemă din viața nu chiar de toate zilele, problemă cu care m-am confruntat și mă confrunt și cu care se va confrunta foarte probabil și tînărul meu cititor : cumpărarea în rate sau achitarea în rate a unui împrumut. Pentru că atunci cînd mi s-a pus pentru prima oară această problemă — calcularea dobînzii la un împrumut — mi-am bătut cîtva capul cu ea și pentru că rezultatul la care am ajuns poate fi util și viitorilor întemeietori de familii, consider utilă inserarea următoarei probleme în paginile acestei culegeri :

„Care este dobînda $D$ care trebuie plătită pentru un împrumut de m lei plătibil în $n$ rate lunare cu rata de $p$ lei ? Dobînda anuală percepută de către „împrumutant" este de $q\%$. Se presupune că plata se face cu regularitate."

Soluționarea acestei probleme înseamnă de fapt găsirea unei relații care să ni-l dea pe $D$ funcție de $m$, $n$, $p$, $q$. Raționamentul în... rate arată astfel.

La achitarea primei rate, fapt care se petrece după o lună de zile, se percepe dobînda pe o lună pentru întreaga sumă împrumutată. Aceasta este :

$$\frac{q}{12\times 100}\cdot m$$

unde 12 semnifică dobînda pe o lună (a 12-a parte din $q\%$ anual).

La plata celei de-a doua rate, dobînda percepută va fi :

$$\frac{q}{12\times 100}\,(m-p).$$

Continuînd raţionamentul acesta se găseşte pentru ultima dobîndă expresia :

$$\frac{q}{12 \times 100}[m-(n-1)p].$$

Însumînd aceste dobînzi parţiale se găseşte pentru dobînda totală o valoare dată de relaţia :

$$D=\frac{q}{12\times 100}mn-\frac{qp}{12\times 100}[1+2+3+\ldots+(n-1)]=$$

$$=\frac{qn}{24\times 100}[2m-p(n-1)]$$

unde am ţinut seama de suma progresiei $1+2+3+\ldots=\frac{n(n-1)}{2}$ (pentru care cel care nu o ştie nu poate fi... progresist decît cel mult în sensul de suporter al echipei de fotbal „Progresul" ? !). Şi-uite-aşa am ajuns şi cu împrumutul achitat şi în posesia unei formule care ne pune la adăpost de eventualele erori ale vreunui calculator electronic pus să ne calculeze dobînda... Dar fiindcă veni vorba de calculator, aş încheia cu povestea unuia care, programat să interpreteze linioara doar ca semn „minus", a luat foc încăpăţînîndu-se să interpreteze ca atare linioara din numele Anne-Marie...

## 24. PRIMUL CUPLAJ FIZICO-GEOMETRIC... SAU „CENTRUL DE GREUTATE AL UNUI TRAPEZ"

Îmi amintesc ce mult mi-a plăcut la mecanica teoretică acel capitol în care se vorbea despre centrul de greutate şi mai cu seamă de relaţia matematică privind poziţia acestuia. Îmi amintesc de asemenea de impresia încă mai veche pe care mi-a produs-o aflarea adevărului „fizico-matematic" conform căruia punctul de intersecţie al medianelor unui triunghi este centrul de greutate al acestuia. Şi ce satisfacţie am avut cînd am pătruns substratul fizic al acestui adevăr ! De multe ori vroiam să-l demonstrez eu însumi plecînd de la relaţia care dă vectorul de poziţie al centrului unui sistem de puncte materiale :

$$\vec{r}_G=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+\ldots+m_n\vec{r}_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}.$$

N-am găsit însă niciodată voința necesară pentru aceasta dar am făcut-o, deși pe o altă cale, pentru trapez, o figură evident mai complicată și care pînă atunci nu prea mă pasionase.

Cerîndu-mi-se ajutorul la rezolvarea unei probleme de clasa a VII-a mi-am dat seama că era vorba tocmai de centrul de greutate al unui trapez (în text se cerea suspendarea trapezului într-un punct obținut ducînd anumite linii apoi caracterizarea stării de echilibru al acestuia). Verificarea presupunerii a constituit de fapt rezolvarea problemei care mi-a inspirat titlul de mai sus și al cărei enunț este următorul:

„Să se arate că centrul de greutate al unui trapez oarecare se află la intersecția a două segmente: cel care unește mijloacele bazelor și cel care unește capetele segmentelor formate din fiecare bază prelungită cu un segment congruent cu baza cealaltă (prelungirile se fac în sensuri contrare)"

Soluția acestei probleme se găsește desigur prin multe cărți și se bazează pe centrul de greutate al triunghiului, presupus cunoscut (se duc succesiv cele două diagonale și se găsesc centrele de greutate ale celor două perechi de triunghiuri, apoi se intersectează cele două segmente determinate de perechile de centre). Dar pe această cale l-aș lăsa pe cititor să meargă deoarece eu mi-am propus să ajung la același rezultat folosind, din fizică, condiția de echilibru al forțelor avînd direcții paralele și același sens...

Fie trapezul *BCNM* avînd „greutate" distribuită omogen de-a... lungul și latul suprafeței lui. Se prelungesc laturile neparalele *BM* și *CN* pînă se intersectează în punctul *A* (fig. 35). Ia naștere în felul acesta triunghiul *ABC* avînd centrul de greutate în *G*. Se notează cu $G_1$ centrul de greutate al triunghiului *AMN*

Fig. 35

și cu $G_2$ cel al trapezului considerat ($BMNC$). Considerînd că triunghiurile și trapezul au greutate, este evident că aceasta va fi proporțională cu suprafețele (ariile) respective și că punctele de aplicație ale greutăților celor trei figuri vor fi centrele lor de greutate (pe figura 35 greutățile sînt marcate cu vectorii respectivi).

Gunoscînd pozițiile lui $G$ și $G_1$ se poate afla poziția lui $G_2$ — aici este miezul fizic al soluției —, punînd condiția de echilibru pentru cele trei forțe de greutate, cea a triunghiului mare fiind rezultanta celorlalte două. Este un dușman al fizicii cel ce nu știe că această condiție constă în egalitatea momentelor forțelor din $G_1$ și $G_2$ în raport cu $G$:

$$(1) \qquad GG_1 \cdot MN \cdot AF = GG_2 \cdot (MN + BC) \cdot FE,$$

unde greutățile sînt „suplinite“ de suprafețele cu care sînt direct proporționale (în relație se disting „dublele“ suprafețelor triunghiului mic și trapezului, ținînd cont că $AF$, $AE \perp MN$, $BC$). Din această relație interesează $GG_2$ așa că:

$$(2) \qquad GG_2 = \frac{MN}{MN + BC} \cdot \frac{AF}{FE} \cdot GG_1$$

relație pe care deocamdată o introducem în memoria... rezolvitorului.

Se prelungește apoi $[MN]$ cu $(NR) \equiv (BC)$ iar pe $[BC]$ cu $(BQ) \equiv (MN)$ (în sensurile indicate pe figură) și se notează cu $I$ intersecția dintre $RQ$ și mediana $AD$. Problema se reduce acum la a arăta că $G_2$ coincide cu $I$ (deocamdată „ne facem“ că le vedem distincte pe figura 35).

Dacă $P$ este mijlocul segmentului $MN$, se poate calcula $PI$ din asemănarea triunghiurilor $PIR$ și $DIQ$:

$$(3) \qquad \frac{PI}{ID} = \frac{2\ BC + MN}{BC + 2\ MN}.$$

Ca orice proporție, și aceasta se pretează la o derivare convenabilă (se adaugă numărătorii la numitori, în cazul nostru) și ținînd seama de $PI + ID = PD$,

$$(4) \qquad PI = \frac{2\ BC + MN}{3\,(BC + MN)} \cdot PD.$$

De fapt ne interesează $GI$ pentru a vedea dacă este egal cu $GG_2$. Pornind de la $GI = PI - PG = PI - \left(\frac{2}{3} \cdot AD - AP\right)$ și ținînd seama de (4)

(5) $$GI = \frac{2\ BC + MN}{3\,(BC + MN)}\,.\,PD - \frac{2}{3}\,.\,AD + AP$$

unde înlocuim $PD = AD - AP$ și $AD = \frac{BC}{MN}\,.\,AP$ (dintr-o asemănare care nu are nevoie să fie „prezentată") astfel că:

(6) $$GI = \frac{2}{3}\,.\,\frac{AP\,.\,MN}{MN + BC}$$

după o suită de calcule în care cititorul nu trebuie să aibă încredere...

Ne concentrăm acum asupra lui $GG_2$. Observînd că $GG_1 = AG - AG_1 = \frac{2}{3}(AD - AP)$ și $\frac{AF}{FE} = \frac{AP}{PD}$ (Tales), relația (2) devine:

(7) $$\overline{GG_2} = \frac{2}{3}\,.\,\frac{AP\,.\,MN}{MN + BC}\,.$$

Iată din nou o relație foarte importantă care „pică" la nr. 7! Dacă aruncăm o privire retrospectivă vom constata că-i foarte frecventă această coincidență în paginile prezentei culegeri. S-o proclamăm drept „frapantă" și să observăm din (6, 7)

(8) $$GI = GG_2$$

din care deducem sus și tare că punctele $I$ și $G_2$ coincid. Această a doua coincidență pune capăt peripețiilor noastre „trapeziste", însemnînd rezolvarea problemei cu primul cuplaj fizico-geometric. Am putea încheia așa: găsirea unui centru de greutate? nimic mai simplu!

## 25. O PROBLEMĂ CARE ALUNGĂ SOMNUL ȘI NECAZURILE... SAU „HEXAGONAL = CUBIC (? !)"

Trăiam o perioadă de grele frămîntări personale cum nu mai avusesem și cum sper să nu mai am vreodată. Tocmai în această perioadă am început să citesc o interesantă carte: „Din lumea coloizilor". Într-unul dintre capitole era vorba despre modul în care se așază ionii unui metal și se făceau unele considerații din care voi reproduce cîteva în cele ce urmează.

Dat fiind că electronii au nevoie de foarte puțin „loc" din cauza dimensiunilor lor infime, ionii unui metal se așază de obi-

cei după unul din modurile de cea mai compactă îngrămădire a unor sfere cu diametre egale. Există numai două astfel de moduri. După unul din ele sferele sînt astfel dispuse încît ocupă vîrfurile unor cuburi și centrele fețelor acestora. După cel de-al doilea, sferele se așază în vîrfurile și centrele unor hexagoane care formează straturi suprapuse. La rîndul lor, straturile se așază unele față de altele astfel încît o sferă dintr-un strat este tangentă la alte trei din stratul vecin (care și ele sînt tangente între ele și deci împreună cu intrusa din stratul vecin formează un tetraedru regulat). În ambele cazuri se obține o îngrămădire la fel de compactă, adică un număr dat de sfere ocupă unul și același volum în cele două moduri de așezare, fiecare sferă fiind înconjurată de alte 12 sfere (cu puțin efort se poate verifica mintal acest adevăr legat de înconjurarea unei sfere, ținînd seama chiar de scurtele descrieri de mai sus ale modurilor de așezare). Din considerațiile expuse a decurs următoarea problemă :

„Să se arate că în cazul celei mai compacte aranjări a unor sfere de diametre egale, sferele nu ocupă mai mult de 74,08% din întregul spațiu."

Am simțit puternic dorința de a rezolva această problemă, deși îmi părea un lucru foarte greu (sau poate tocmai de aceea !). Am purces deci hotărît la treabă și asta într-un moment neobișnuit:

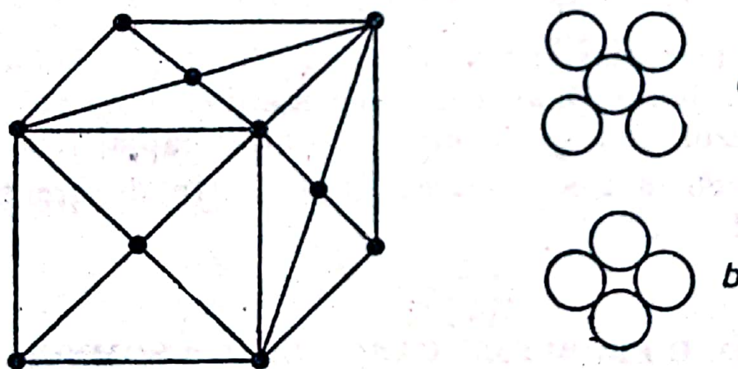



Fig. 36

supravegheam o instalație care funcționa în timpul nopții și nu-mi surîdea deloc să ațipesc lîngă ea (căci „somnul în aceste condiții verticale/și-atît de izolate, nu face cinci parale", cum spune Topîrceanu). Și a fost un strașnic nonsomnifer problema aceasta pe care, liber și nesilit de nimeni, mi-am propus-o și am răpus-o ! Ce-i drept m-a ajutat și instalația care a binevoit să nu se defecteze în lungile intervale de timp cînd, furat de problemă, am uitat total de ea.

Iată acum soluția pe care voi încerca s-o redau cît mai... compact cu putință, mai întîi pentru cazul dispunerii cubice

În figura 36 sînt reprezentate doar centrele sferelor situate în vîrfurile unui cub și la intersecția diagonalelor fețelor (cub cu fețe centrate). Mai mult, nu sînt figurate decît centrele sferelor care se „văd". Examinînd figura se constată că o celulă cubică cu fețe centrate conține 14 sfere dispuse, pe verticală ca și pe orizontală, în trei straturi cu configurație și număr de sfere diferite. Astfel, în figura 36 se disting : a) stratul marginal care conține 5 sfere și b) stratul median conținînd 4 sfere dispuse în spațiile dintre cele 5 sfere ale „marginalelor".

Fie un spațiu foarte mare umplut cu sfere în modul descris mai sus. Figurăm cu cercuri pline sferele din stratul de primul tip, situate în prim-plan, și cu cercuri cele din planul al doilea (fig. 37). Considerăm spațiul drept un cub a cărui muchie conține „$n$" sfere. Se constată ușor că primul strat conține două rețele de sfere, interpătrunse, prima conținînd $n^2$ sfere, iar cea de-a doua $(n - 1)^2$. Prin urmare primul strat conține $n^2 + (n - 1)^2$ sfere. Privind atent cel de-al doilea strat constatăm că se compune din „$n$"șiruri a cîte $n - 1$ sfere, deci care totalizează $n(n - 1)$ sfere, și din $n - 1$ șiruri a cîte $n$ sfere totalizînd $(n - 1)\,n$ sfere. Deci al doilea strat are $2n\,(n - 1)$ sfere. Nu este greu de văzut, în modul în care ne-am ales spațiul, că acest cub-spațiu conține „$n$" straturi ca acela din prim-planul figurii de mai sus și „$n - 1$" ca cel de-al doilea. Deci cub-spațiul va conține un număr de sfere dat de expresia :

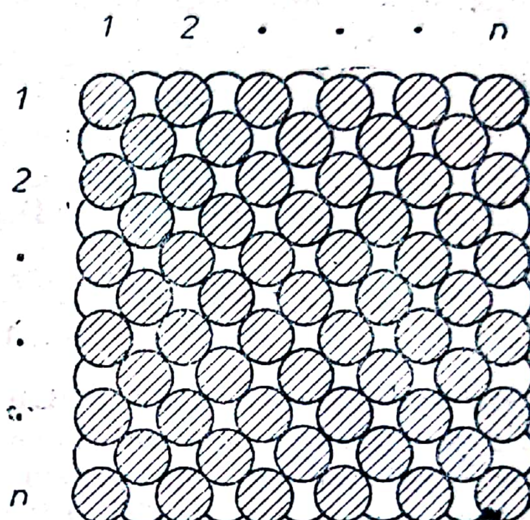


Fig. 37

$$(1) \qquad n[n^2 + (n - 1)^2] + (n - 1)\,2n(n - 1) = 4n^3 - 6n^2 + 3n.$$

Toate aceste sfere la un loc ocupă volumul :

$$(2) \qquad v = \frac{4}{3}\pi r^3(4n^3 - 6n^2 + 3n).$$

Se calculează în continuare volumul cubului în care sînt îngrămădite aceste sfere. Va trebui pentru aceasta să evaluăm muchia cub-spațiului, muchie care cuprinde cele $n$ sfere de lungime totală $n \cdot 2r$ și cele $n - 1$ intervale corespunzătoare a căror lungime se calculează din figura 38. Acolo diagonala pătratului figurat este

clar $4r$ și deci latura este $\frac{4r}{\sqrt{2}}$. În consecință distanța care ne interesează va fi dată de $\frac{4r}{\sqrt{2}} - 2r$, iar muchia cub-spațiului este

(3) $$m = n \cdot 2r + (n-1)\left(\frac{4r}{\sqrt{2}} - 2r\right) = 2r(n\sqrt{2} - \sqrt{2} + 1).$$

Volumul spațiului-cub va fi așadar:

(4) $$V = 8r^3(2\sqrt{2}n^3 + \dots)$$

Avem acum capacitatea de a face raportul între volumul total al sferelor și volumul spațiului care le găzduiește. Deci, combinînd în acest sens relațiile (2) și (4), va rezulta:

(5) $$\frac{4}{3} \cdot \frac{r^3(4n^3 - 6n^2 + 3n)}{8r^3(2\sqrt{2}n^3 + \dots)} = \frac{4n^3 - 6n^2 + 3n}{6(2\sqrt{2}n^3 + \dots)}$$

raport valabil însă, doar pentru o porțiune de spațiu (cub-spațiul pe care-l tot invocăm de cîteva pagini încoace). Noi sîntem mult mai expansivi, căci ne punem problema pentru întregul spațiu, ceea ce presupune $n \to \infty$. Cititorul din clasa XI-a a și ajuns la relația următoare:

(6) $$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{6} \cdot \frac{4n^3 - 6n^2 + 3n}{2\sqrt{2}n^3 + \dots)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{2\sqrt{2}} = 0{,}7407 \dots = 74{,}07\%$$

care consfințește rezolvarea problemei pentru cazul dispunerii cubice (elevii claselor a IX-a și a X-a trebuie ca, timp de doi ani respectiv unul, să ne creadă pe cuvînt cu privire la această relație; culegerea trebuia să aibă și lipsuri...).

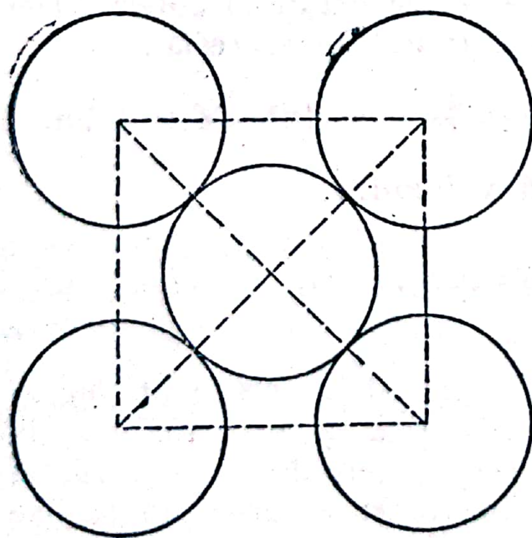


Fig. 38

Înainte de a trece la partea a doua a problemei, iată două observații:

a) făcînd diferența numerelor de sfere din cele două straturi, se obține $n^2 + (n-1)^2 - 2n(n-1) = 1$, adică se regăsește diferența dintre aceleași straturi pentru cubul elementar (fig. 36);

b) dacă se face un calcul similar celui de mai sus, pentru cubul elementar (14 sfere), se găsește raportul $14 \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi / [2r(\sqrt{2}+1)]^3 = 52\%$

Fie acum cazul dispunerii hexagonale.

Ca și în cazul cubic, fie mai întîi centrele sferelor situate în celula elementară hexagonală. În figura alăturată (39) centrele sferelor care nu se văd sînt figurate prin cercuri goale. O primă notabilă deosebire față de cazul precedent: celula elementară conține 17 sfere, dispuse tot în trei straturi, cel de la mijloc fiind diferit de cele marginale (este translatat față de acestea astfel încît sferele lui să se așeze în interspațiile celorlalte, tangente la acestea).

Considerăm și aici un spațiu foarte mare umplut cu sfere în modul indicat de către celula elementară. O față a paralelipipedului, să zicem baza, va fi constituită ca în figura 40. Pe înălțime

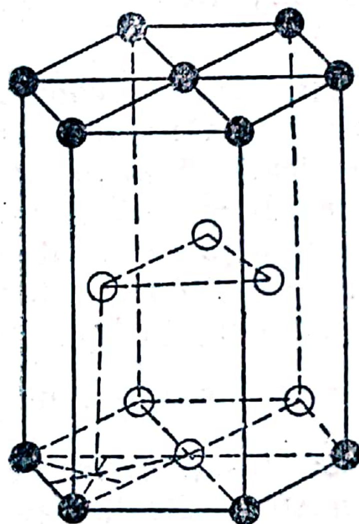


Fig. 39

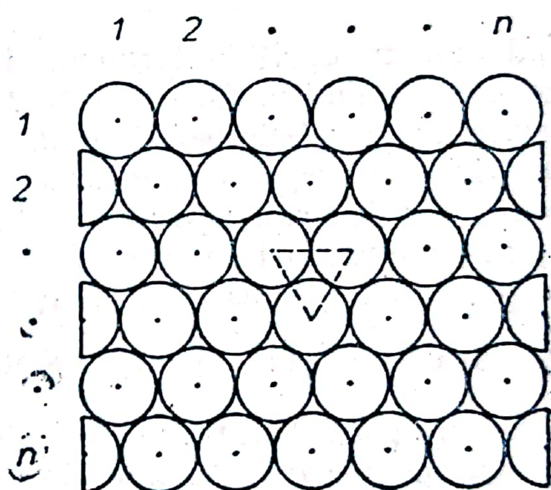



Fig. 40

(perpendiculara pe planul foii) se așază $n$ astfel de straturi respectînd „zig-zagul" caracteristic acestei structuri. În felul în care s-a luat spațiul se vede că este într-adevăr vorba de un paralelipiped, căci cele trei muchii nu sînt egale ca lungime. Să justificăm această afirmație. Muchia după axa X (a se vedea figura) este egală evident cu suma diametrelor celor $n$ sfere, adică este $2nr$. Muchia paralelă cu axa Y constă din 2 raze sferice plus de $n-1$ ori înălțimea triunghiului echilateral figurat prin linii punctate, adică are lungimea $2r + (n-1)\sqrt{3}r$. Muchia după Z, (perpendiculara pe planul hîrtiei) conține de asemenea un $2r$ la care se adaugă de $n-1$ ori înălțimea tetraedrului regulat format de centrele a trei sfere dintr-un strat și al sferei din stratul vecin

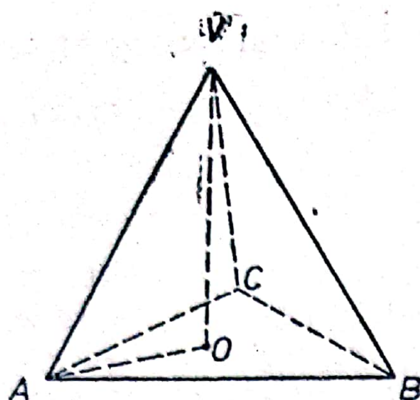


Fig. 41

care se sprijină (deci la tangență) pe acestea. Muchia tetraedrului (fig. 41) este evident $2r$. În urma unor calcule pe care în secolul următor le vor putea face și copiii din grupa mare de la grădiniță, se găsește pentru înălțimea tetraedrului $VO = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{6}\, r$ și deci muchia după $Z$ are lungimea egală cu $2r + \frac{2}{3}\sqrt{6}\, r\,(n-1)$. Sîntem deci în măsură să calculăm volumul paralelipipedului-spațiu:

$$V = 2nr\,[\sqrt{3}(n-1)\,r + 2r]\,.\left[\frac{2}{3}\sqrt{6}\,(n-1)\,r + 2r\right] = \tag{7}$$
$$= 2r\sqrt{3} \cdot r \cdot \frac{2}{3}\, r\sqrt{6}n^3 + \dots,$$

unde ne-am oprit la termenul în $n^3$, fiindcă doar el contează la trecerea la limită. Ce urmează ? Bineînțeles numărul de sfere cuprinse în paralelipipedul analizat pe verticală și pe orizontală. Din figura 40 reprezentînd baza acestuia, se observă că în rîndurile cu număr de ordine par avem la capete cîte o jumătate de sferă, deci aceste rînduri au ca și celelalte cîte $n$ sfere. Ppd-ul (observați ce prescurtare nostimă am găsit pentru „paralelipiped" !) conține prin urmare $n^3$ sfere al căror volum total este, evident, $n^3\,\frac{4}{3}\pi r^3$. Pare curios acest număr de $n^3$ sfere care ar presupune mai curînd un cub pe a cărui muchie sînt dispuse $n$ sfere. Realitatea însă, ușor de văzut, este că acest ppd diferă „atomic", la muchii, de cubul cu același număr de sfere. Raportul „volumetric" care interesează este deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 n^3}{\frac{4}{3}\sqrt{18} r^3 n^3 + \dots} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 74{,}05\,\%, \tag{8}$$

adică aceeași valoare ca în cazul îngrămădirii compacte cubice.

Nici această a doua parte a problemei nu o pot încheia fără o observație. Să presupunem că nu vrem să lucrăm cu „jumătăți de măsură" (a se citi „de sferă"). În acest caz dispar semisferele din raționamentele noastre, iar stratul respectiv va număra mai puține sfere. Pentru ca baza să rămînă un dreptunghi, numărul

șirurilor trebuie să fie impar astfel încît la margini să fie șiruri cu cîte $n$ sfere. Deci $n$ este impar, iar numărul șirurilor cu $n$ sfere este $\frac{n+1}{2}$, în timp ce al celor cu cîte $n-1$ sfere este $\frac{n-1}{2}$. Deci din $n^2$ sfere vor lipsi tot atîtea cîte șiruri „deficitare" sînt, adică $\frac{n-1}{2}$. Stratul $XY$ are prin urmare $n^2 - \frac{n-1}{2}$ sfere. Nu este greu de observat că ppd-ul, din aceleași considerente de „dreptunghiularitate", trebuie să aibă $\frac{n+1}{2}$ straturi de tip $XY$. La stratul de deasupra lui $XY$ șirurile se inversează ca număr de sfere, astfel că vor fi aici $\frac{n+1}{2}$ șiruri cu $n-1$ sfere și deci vor lipsi $\frac{n+1}{2}$ sfere din numărul de $n^2$ sfere. Acest strat are deci $n^2 - \frac{n+1}{2}$ sfere și evident ppd-ul numără $\frac{n-1}{2}$ asemenea straturi. Numărul total de sfere din ppd este deci:

$$(9) \quad \frac{n+1}{2}\left(n^2-\frac{n-1}{2}\right)+\frac{n-1}{2}\left(n^2-\frac{n+1}{2}\right)=n^3-\frac{(n+1)(n-1)}{2}.$$

Luînd în considerare acest număr de sfere, raportul care interesează nu se schimbă deoarece coeficientul lui $n^3$ este tot 1 ca și în cazul „cu jumătăți" (prin trecerea la limită contează doar termenul în $n^3$) cînd în ppd găsisem $n^3$ sfere. Cititorul poate face afirmația că ppd-ul este același ca dimensiuni, dar are cu $\frac{(n+1)(n-1)}{2}$ mai puține sfere ceea ce prin trecerea la limită nu mai contează.

În încheierea „compactei" rezolvări aș relata (pentru că are ceva comun cu problema răpusă mai sus) un fapt cules din presa noastră: cultivatori japonezi au reușit să obțină pepeni de formă... cubică. Cu aceștia s-a ocupat 100% din spațiul unui autocamion.... Interesant, nu ?

## 26. AL DOILEA CUPLAJ FIZICO-GEOMETRIC... SAU „O RELAȚIE DE FORMĂ PTOLEMEICĂ"

Ce ar face cititorul dacă s-ar afla în fața următoarei probleme: „Într-un patrulater $ABCD$ inscriptibil într-un semicerc (fig. 42) există relația $AD \cdot BC + AC \cdot DP = AP \cdot BD$, unde $P$ este punctul de intersecție al diagonalelor" ?

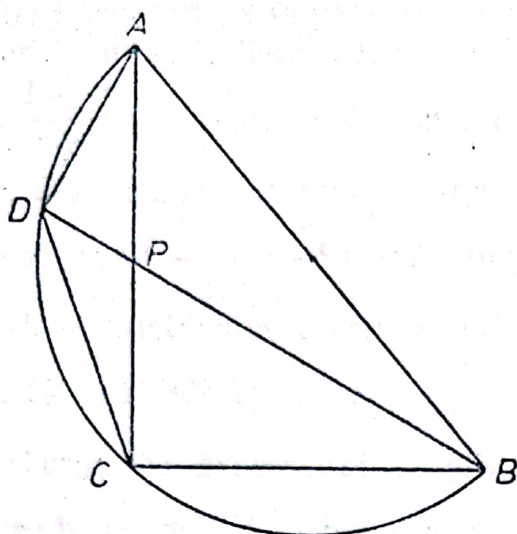


Fig. 42

În primul rînd poate ar încerca s-o rezolve pe o cale pur geometrică. Şi poate ar reuşi. Sau poate n-ar reuşi, împărtăşind astfel întru totul soarta mea care şi eu am încercat s-o rezolv în aceeaşi manieră, tentat de aspectul „ptolemeic" al relaţiei.

În al doilea rînd — desigur dacă în primul a eşuat — va încerca s-o stabilească trigonometric, cale pe care eu n-am abordat-o dar despre care cred că-l va duce mai uşor la izbîndă.

La cel de-al treilea rînd îmi place să cred că nu va recurge, indiferent de rezultatul de la precedentul. De ce îmi place ? Pentru că acesta ascunde originalitatea problemei : stabilirea relaţiei din enunţ pe o cale mai puţin obişnuită (oarecum cunoscută de la problema 24) — fizico-geometrică. Aşadar o „cîrdăşie" ! Începuturile acestei „cîrdăşii" sînt eminamente fizice şi îşi au originea în problema 1.3.135 din „Probleme de fizică pentru clasele IX—X" de A. Hristev şi coautorii, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

Tărăşenia m-a prins în vîrtejul ei împreună cu un elev de clasa a IX-a care judecase bine problema, dar căruia îi era cu neputinţă să ajungă la rezultatul din carte fiindcă relaţia de care avea nevoie „la mal", $\text{tg}(\alpha - \beta) = \text{tg}\, \alpha - \text{tg}\, \beta/1 + \text{tg}\, \alpha \cdot \text{tg}\, \beta$, avea s-o înveţe abia în partea a doua a anului şcolar !

Problema cerea să se determine forţa care trebuie opusă, pe orizontală, unui corp aflat pe un plan înclinat, astfel încît corpul să rămînă în repaus pe plan. Se dădea $\alpha$ unghiul planului ca şi unghiul de frecare la alunecare (adică unghiul unui plan înclinat pe care forţa de frecare echilibrează forţa greutăţii corpului astfel încît acesta alunecă uniform pe plan) legat de coeficientul de frecare prin relaţia $\mu = \text{tg}\, \varphi$.

Din clara figură 43 soluţia se „luminează" astfel : pentru a menţine corpul (figurat doar prin centrul său de greutate G) nemişcat trebuie să existe egalitate între componenta $GP$ a greutăţii şi suma următoarelor componente-forţe : componenta paralelă cu planul, $GP'$, a forţei „umane" $GR'$ ; forţa de frecare datorată componentei normale a aceleiaşi forţe $GR'$ (pe figură componenta $GN'$ perpendiculară pe plan) ; forţa de frecare dato-

rată componentei normale pe plan, $GN$, a greutății corpului. În „cifru" fizic toate acestea vor să însemne :

(1) $$mg \sin \alpha = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha + \mu . F . \sin\alpha + F . \cos \alpha$$

unde $F$ reprezintă modulul forței pe care ne-o cere problema (și căreia mai sus i-am zis „umane"). Din această relație se calculează $F$ :

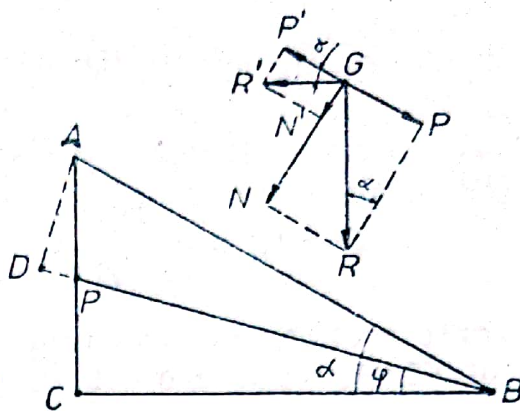



Fig. 43

(2) $$F = mg \cdot \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = mg \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}$$

Înlocuind $\mu = \operatorname{tg} \varphi$, se găsește expresia finală pentru $F$ :

(3) $$F = mg \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi} = mg \operatorname{tg} (\alpha - \varphi).$$

Recunoașteți că ne-am aflat în fața unei probleme de fizică realmente frumoase (de aceea i-am și dat soluția, soluție poate ceva mai telegrafică decît ne-ar permite-o programa analitică). Din păcate elevul colaborator n-a putut ajunge decît la prima parte a relației (2) pe care evident nu știa s-o restrîngă (de unde să-i vină în cap împărțirea cu „cosinus" cînd el nu învățase formulele trigonometrice ale sumelor sau diferențelor de arce ?)

I-arăt deci cum să procedeze,
Iar el e gata ca să protesteze
Indiferent cine-ar fi spus-o
Cum că problema nu a dus-o
La finalitate...
Și avea dreptate !

Drept care mi-am pus brusc următoarea întrebare : oare nu s-ar putea face astfel raționamentul încît să se opereze doar cu unghiul $(\alpha - \varphi)$ ? Ar apărea atunci direct $\operatorname{tg} (\alpha - \varphi)$ lucru cu care elevul meu avea... tangență.

Dar, iarăși, unde dai și unde crapă !

Nici pomeneală să reușesc ceva „pe calea ce-am deschis". Mi-a reușit însă altceva cînd avut-am ideea de a transforma relația (1) dintr-una fizică într-una pur geometrică ? ! Pentru a reuși

asemenea „metamorfoză“ a trebuit să observ la figura 43 următoarele corespondențe fizico-geometrice (cu caracter de egalități) :

$$(4)\qquad \begin{aligned} &mg = GR\,;\ F = GR'\,;\ \sin\alpha = \frac{AC}{AB}\,;\quad \cos\alpha = \frac{BC}{AB} \\ &\mu = \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{PD}{AD}(\Delta ADP \sim \Delta BCP) \end{aligned}$$

Toate acestea operează asupra relației (1) care își schimbă astfel total înfățișarea. S-o consemnăm în forma ei brută :

$$(5)\qquad GR\cdot\frac{AC}{AB} = GR\cdot\frac{BC}{AB}\cdot\frac{PD}{AD} + GR'\cdot\frac{AC}{AB}\cdot\frac{PD}{AD} + GR'\cdot\frac{BC}{AB}$$

de unde separînd complet mărimile cu semnificație fizică, $GR$ și $GR'$ și ținînd seama de relația (3), precum și de figura 43,

$$(6)\qquad \frac{AC\cdot AD - BC\cdot PD}{AC\cdot PD + BC\cdot AD} = \frac{GR'}{GR} = \frac{F}{mg} = \frac{AD}{BD} = \mathrm{tg}\,(\alpha - \varphi)$$

Din această relație, prin diferite operații, prin simplificarea cu $AD$ și ținînd seama de „asemănările“ $BC\cdot AP = AD\cdot BP$ și $BP\cdot DP = AP\cdot PC$ (din perechile de triunghiuri asemenea... ghici ciupercă), se ajunge la

$$(7)\qquad BC\cdot AD + AC\cdot DP = AP\cdot BD$$

adică tocmai relația cerută.

Se vede ușor că această relație are exact forma relației lui Ptolemeu (care în cazul aceluiași patrulater are expresia $BC\cdot AD + AB\cdot CD = AC\cdot BD$). Combinînd-o cu aceasta, rezultă o relație similară

$$(8)\qquad BD\cdot PC + AC\cdot DP = AB\cdot CD.$$

### 27. DE LA BORIS G. CITIRE... SAU „RELAȚII TRIGONOMETRICE ORICÎT DE ÎNTINSE“

Nu, nu este vorba de Boris... Godunov, ci de fizicianul Boris Grabcev, vechi rezolvitor la G.M.F., cel care în gazeta din iunie 1954, seria B a fost citat la rubrica rezolvitorilor de probleme (la localitatea Predeal) cu nu mai puțin de 110 probleme rezolvate ! ! Deși un foarte bun rezolvitor la vremea primei tinereți (recordul de mai sus îl recomandă), mai cu seamă ca geometru, în drum spre cea de-a doua tinerețe și-a cam pierdut dragostea

cea mare pentru geometrie dar şi-a păstrat-o, dacă nu chiar şi-a intensificat-o pe cea pentru trigonometrie şi algebră. În această calitate să-l includem în această pauză de geometrie pură.

Într-o zi pe cînd ne aminteam cu nostalgie momente din tinereţea noastră de rezolvitori şi chiar de propunători, Boris mi-a pus sub ochi nişte probleme cu soluţii originale. Atît problemele cît şi soluţiile mi s-au părut atît de interesante încît pe loc mi-am zis aşa :

Ce-nseamnă domnule să ai,<br>
Deşi te afli-n luna mai,<br>
Preocupări „tomnatice"<br>
În sfere matematice !

(Cred că era, da, în luna mai a lui '81). Am lăsat aceste probleme în „păragină" pînă în momentul în care mi-a încolţit ideea acestei cărţi. Atunci mi-am zis că deşi nu sînt rezolvate de mine (fapt care la urma urmei nu are pic de importanţă pentru cititor) merită să fie aduse sub lumina „neagră" a tiparului.

Problemele, cu privire la care amicul meu menţionează că doar soluţiile sînt originale, sînt de trigonometrie şi au următoarea înfăţişare :

a) $$\sum_{n=1}^{\frac{k-1}{2}} \cos\frac{2n\pi}{k} = -\frac{1}{2} \text{ pentru } k \text{ impar şi mai mare decît } 1$$

b) $$\sum_{n=1}^{\frac{k}{2}} \cos\frac{2n\pi}{k} = -1 \text{ pentru } k \text{ par}$$

c) $$\sum_{n=1}^{k} \cos\frac{2n\pi}{k} = \sum_{n=1}^{k} \sin\frac{2n\pi}{k} = 0 \text{ pentru } k \text{ natural}$$

Privind „chipul" acestor relaţii, oricine îşi dă seama că treaba nu-i deloc uşoară, că a le deduce pare echivalent cu escaladarea unui zid înalt. Oricine în afară de cel ce şi-a însuşit maxima maiorului Pronin (vezi excelenta carte „Aventurile maiorului Pronin") : dacă te afli în faţa unui zid înalt, nu te grăbi să-l escaladezi rupîndu-ţi genunchii şi coatele, ci dă-te un pas înapoi şi priveşte în

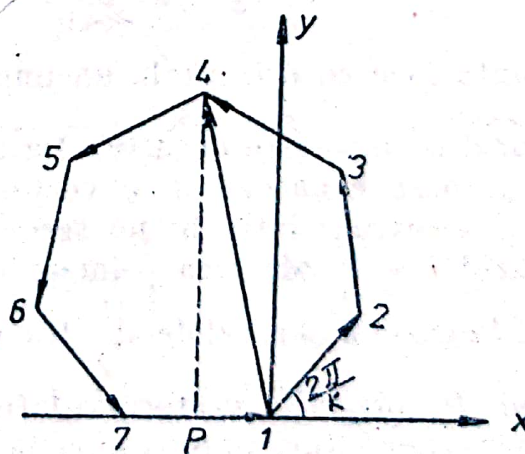


Fig. 44

stînga și-n dreapta că poate găsești... scara ! Nu știu dacă Boris a citit cartea sus-amintită, dar e cert că în rezolvarea acestor probleme a aplicat super-înțeleapta maximă care sălășluiește în paginile sale. Scara găsită de el, cu care se ajunge în vîrful „zidului“ în doi timpi și trei mișcări, este un... poligon regulat cu un număr convenabil de laturi cărora li se conferă calitatea de vectori. Efectele acestei conferiri se vor dovedi de-a dreptul miraculoase.

Începem, firește, cu relația (a).

În figura 44, „figura“ centrală e poligonul regulat cu $k = 7$ laturi (raționamentul este același, desigur, pentru orice alt $k$ impar). O latură-vector se așterne pe orizontală. Vîrful acesteia este considerat vîrful *1* al poligonului, iar următorul vector-latură își are originea în acest vîrf. Acest vector formează cu orizontala un unghi congruent cu unghiul la centru corespunzînd unei laturi și a cărui măsură este $\frac{2\pi}{k}$. Vectorul-latură următor (deci al doilea) va face un unghi dublu cu orizontala, adică $2 \cdot \frac{2\pi}{k}$. Deci vectorul-latură cuprins între vîrfurile $i$ și $i + 1$, deci corespunzînd laturii $i$, va face cu orizontala unghiul $\frac{2\pi i}{k}$.

Cum o latură este așezată pe orizontală, vîrful cel mai de sus (în planul hîrtiei) al poligonului va fi întotdeauna situat pe „verticala“ mijlocului acelei laturi (punctul $P$ din figură). Dacă vom considera laturile poligonului drept vectori unitari (de lungime unitate) și vom însuma primii $\frac{k-1}{2}$ dintre ei (primii trei în figură), proiecția pe orizontală a rezultantei, adică de fapt suma pe care trebuie s-o calculăm, va fi egală cu segmentul $OP$ ca lungime, deci cu $-\frac{1}{2}$ (semnul „—“ se datorește faptului că rezultanta face cu orizontala un unghi cuprins între $\frac{\pi}{2}$ și $\pi$, unghi al cărui cosinus este negativ). Parafrazîndu-l pe Caragiale am spune : frumoasă e natura și în vectori e sublimă !

Pentru relația b) ne servim de figura 45 pe care am redat cazul $k = 8$. Menirea principală a acestei figuri este să ne arate că în cazul $k$ par, cel de-al $\frac{k}{2}$-lea vîrf al poligonului se află pe verticala lui $P$, originea vectorului-latură orizontal, Aceeași însumare a vectorilor-laturi unitari duce la o rezultantă care de data aceasta are drept proiecție pe orizontală o întreagă latură a poligonului,

deci de mărime —1 (semnul „—" are aceeaşi explicaţie ca în cazul precedent). Am însumat evident $\frac{k}{2}$ vectori şi am obţinut relaţia cerută (b). Nu mai parafrazăm pe nimeni deşi s-ar merita în continuare...

Cazul (c) a devenit acum ridicol de simplu (însăşi figura a devenit superfluă). Însumînd vectorial toate laturile unui poligon avînd $k$ laturi (cu $k$ oricum, numai natural să fie), rezultanta va fi nulă şi relaţiile (c) apar evidente ca şi valabilitatea lor pentru $k$ atît impar cît şi par, (evident, pentru relaţia cu „sinus" proiecţiile se fac pe axa verticală, $OY$).

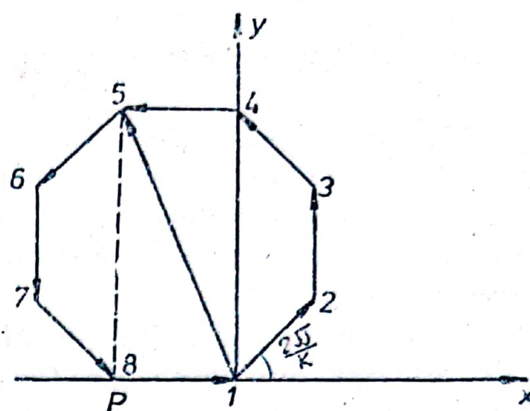


Fig. 45

Am ajuns astfel pe coama zidului „cu relaţii" folosind minunata scară pe care ne-a oferit-o Boris. O scară nu numai la figurat, dar într-un fel chiar la propriu, căci fiţi atenţi : poligonul acesta care ne-a dus uluitor de rapid la soluţie, nu poate fi oare asemuit cu o... „scară frîntă" exact în punctele în care se fixează treptele avînd şi capetele unite ? O scară nemaivăzută, ce-i drept, dar care se poate apropia oricît de mult de... roată (după cum relaţiile cerute sînt „oricît de întinse"). Poate de aceea cele trei demonstraţii de mai sus au mers ca pe roate...

*P.S.*

Boris declară că relaţia (a) reprezintă o generalizare a următoarei relaţii date la o olimpiadă :

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$$

Mai afirmă că toate relaţiile (a) — (c) sînt cazuri particulare ale relaţiilor :

$$\sum_{n=1}^{k}\sin(nx)=\sin\frac{k+1}{2}x\cdot\sin\frac{k}{2}x\cdot\operatorname{cosec}\frac{1}{2}x$$

$$\sum_{n=0}^{k}\cos(nx)=\sin\frac{k+1}{2}x\cdot\cos\frac{k}{2}x\cdot\operatorname{cosec}\frac{1}{2}x$$

Vreţi să vedeţi dacă a greşit şi el măcar o dată ?

## 28. PRIMA REZOLVARE CU „CATALIZATORI"... SAU „O PROBLEMĂ CLASICĂ CU AUTOCAMIOANE"

„Două camioane pleacă simultan unul spre celălalt din orașul $A$, respectiv $B$. Ele se întîlnesc la distanța $d = 45$ km de $B$, apoi ajungînd fiecare la destinațiae se întorc și se întîlnesc a doua oară după $\tau = 3{,}0$ ore de la prima întîlnire. Să se afle viteza celui de-al doilea camion."

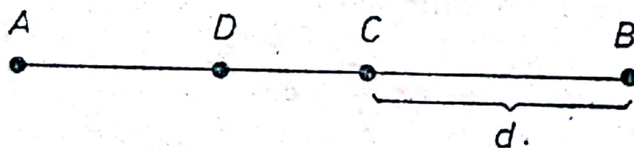
Ce-a fost asta ? Nimic altceva decît enunțarea problemei 1 . 3 . 10 din culegerea de fizică și de binemeritată notorietate (autori : A. Hristev, ... N. Gherbanovschi), amintită pentru prima oară la problema 26.

Cînd mi-a fost prezentat, eram cît p-aci să renunț la acest enunț, adică să zic că problema nu e în toate cele... Păi observați și d-voastră : nu tu distanță între orașe, nu tu vreun timp mai clar, nu tu vreo viteză (dacă se cere doar $v_2$ te-ai aștepta să se dea $v_1$, nu ?), nu tu vreo precizare asupra locului celei de-a doua întîlniri etc. (nu se știe nici măcar dacă șoferii fac transportul în interes de serviciu sau de... viciu, adică știți d-voastră ce și cum) Pe scurt, e o problemă cu „suspense".

Dar nu este numai atît. Este și o problemă a cărei rezolvare seamănă într-un fel cu o reacție chimică posibilă doar în prezența unei anumite substanțe. Asta-i bună — ar putea intui cititorul — numai rezolvări cu „catalizatori" nu avusesem pînă acum ! Și totuși...

Să examinăm rezolvarea !

Mai mult decît în alte probleme, aici unde datele sînt aparent incomplete, este necesar să se alcătuiască o schemă a drumului




parcurs. Din lipsă de schematism, această... schemă nu o vom ridica la rang de figură. Evident $A$ și $B$ reprezintă nu numai punctele de plecare ale celor două camioane, dar și destinațiile lor corespunzătoare. Punctul $C$ reprezintă locul primei întîlniri, iar $D$ pe al celei de-a doua. Ce punct va servi drept punct de plecare ? Punctul $C$ și iată de ce : de-abia cînd pornesc din acest punct camioanele noastre au o soartă pe care o putem urmări cinematic. Pînă în $D$, bineînțeles ! Pentru primul, ecuația mișcării este :

(1) $$v_1 \cdot \tau = CB + BD = d + (s - AD)$$

unde $s$ este, după noi, distanța dintre $A$ și $B$ pe care enunțul problemei o „tace" parcă derutant. Pentru cel de-al doilea camion, similar se scrie :

$$(2) \qquad v_2 \cdot \tau = CA + AD$$

Însumînd aceste două spații se realizează o frumoasă „simplificare" a rezultatului, prin ... reducere :

$$(3) \qquad \tau \cdot (v_1 + v_2) = d + s + CA = 2s.$$

Am obținut o ecuație cu trei necunoscute și se știe „din bătrîni" că mai trebuie două... Una decurge din observația că pentru ambele camioane este același și timpul scurs pînă la prima lor întîlnire ;

$$(4) \qquad \frac{s-d}{v_1} = \frac{d}{v_2} \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{s-d}{d}.$$

Pe cea de-a doua mi-a fost imposibil s-o găsesc, dar din disperare și din... fericire totodată, am cutezat să rezolv sistemul format din ecuațiile (3) și (4) :

$$(5) \qquad \begin{cases} v_1 + v_2 = \dfrac{2s}{\tau} \\ v_1/v_2 = \dfrac{s-d}{d} \end{cases}$$

Și am ajuns prin clasica metodă a substituției la o relație pe care aș încadra-o nu doar o dată ca mai jos, deși este intermediară :

$$(6) \qquad \boxed{\frac{v_2 \cdot s}{d} = \frac{2s}{\tau}}$$

Am încadrat această relație pentru a sublinia și a „îngheța" momentul culminant al rezolvării : simplificarea lui „$s$". Deci, surpriză... nesurprinzătoare : $v_2$ nu depinde de $s$, adevăr oglindit în relația rezultată prin acea simplificare,

$$(7) \qquad v_2 = \frac{2d}{\tau}$$

care încheie totodată rezolvarea subtilei probleme.

Dar o asemenea problemă nu poate să nu aibă și ceva observații „mai ceva" decît alte probleme. Să încercăm a le descoperi pe unele dintre ele :

— surpriza din relația (7) este... nesurprinzătoare fiindcă de acel adevăr ne puteam da seama de la început, $s$ neapărînd în datele problemei ;

— noi am considerat punctul $D$ în stînga lui $C$, dar el poate tot atît de bine să se afle și în dreapta, demonstrația fiind similară ;

— spre deosebire de $v_2$ care nu depinde de $s$, $v_1$ rezultat din același sistem (5) va avea expresia $v_1 = \frac{2}{\tau}(s - d)$ care invită insistent la discuții ; se citește în această relație faptul că pentru $d$ și $\tau$ dați (deci $v_2$ același ) $v_1$ este funcție de $s$ și va lua tot atîtea valori cîte va lua acesta, adică o... infinitate ; într-adevăr $s$ și $v_1$ pot avea, după bunul plac al autorului problemei, cîte o infinitate de valori care însă nu pot fi... infinit de mari ; dar cît de mare poate fi luat $s$ ? ne răspunde relația (3) din care se vede că acum ... $s$ depinde de $v_1$ (adică drumul considerat tacit de către problemă trebuie luat în funcție de posibilitățile mașinilor) în timp ce ecuația a doua a sistemului susține că și de raportul $v_1/v_2$ (cititorul poate să aprofundeze aceste lucruri dacă vrea) ;

— în fine, ultima și cea mai importantă observație a și făcut-o dragul meu cititor care nu poate să nu știe și suficientă chimie : identificarea „catalizatorului" rezolvării sub „chipul" spațiului $s$ ; într-adevăr aidoma unui catalizator care înlesnește reacția, dar nu se regăsește în produsul acesteia, $s$-ul nostru a făcut posibilă rezolvarea problemei, fără însă ca mărimea lui să apară în rezultat ; de aici aparent hazardatul titlu „rezolvare cu catalizatori".

În loc de încheiere, poate cel mai nimerit lucru ar fi să relatez faptul că elevul pe care l-am ajutat la rezolvarea acestei probleme a fost străbătut de un vizibil fior cînd și-a dat seama că $s$ va dispărea prin simplificare...

## 29. BORIS CONTINUĂ „ARIA SIMPLITĂȚII"... SAU UNDE EROU E „e"

Hotărît lucru că amicului meu Boris G. nu-i place să zăbovească cu rezolvările decît în probleme de planorism (unde este vorba să zbori cît mai mult și unde a săvîrșit niște recorduri naționale) și de fizică (în care este doctor). În rest, face el ce face și rezolvă tot ce se ivește cît ai zice peste... După ce mi-a smuls catrene de admirație cu relațiile lui trigonometrice rezolvate cît ai bate din palme, mă pune în situația de a-i căuta neapărat, legat și de numele său mic; un titlu „mare".

Dacă ar exista o operă pentru „Operă", cu subiect de... algebră, și în aceasta o „arie a simplității", lui Boris și numai lui i-ar reveni

interpretarea acesteia. Mai greu s-ar descurca libretistul și compozitorul care ar trebui să pună pe versuri respectiv pe note, rezolvarea ecuației :

$$(1) \qquad n^{(n-1)} - (n-1)^n = 1$$

pentru $n \in N$, ecuație propusă și rezolvată de către „interpret"...
Se pornește de la evidența

$$(2) \qquad (n-1)^n < n^{(n-1)}$$

din care rezultă facil

$$(2) \qquad n - 1 < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{(n-1)} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{(n-1)}.$$

Acum este momentul să intre în scenă „eroul" de care pomeneam în titlu : „e". Acesta este prompt ca orice erou. Într-adevăr trecînd la limită (rugînd elevii claselor IX și X să ne creadă pe cuvînt...) în ultima parte a relației (2),

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{(n-1)} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

astfel că din (2) se obține inegalitatea următoare deosebit de edificatoare și mai ales simplificatoare :

$$(4) \qquad n < e + 1.$$

Această inegalitate ne spune că domeniul valorilor posibile ale lui $n$ este restrîns la $n = 1, 2, 3$ (știind că $e = 2{,}718281828...$), ceea ce se și verifică prin simpla înlocuire în ecuație (toate sînt soluții ale ecuației date).

Simplu și perfect ! „Aria simplității" poate foarte bine să fie chiar „aria perfecțiunii" dacă este valabil aforismul „perfecțiunea e simplă".

## 30. A DOUA REZOLVARE CU „CATALIZATORI"... SAU „PROBLEMĂ CU PLAN ÎNCLINAT ȘI COEFICIENT DE FRECARE"

Un fizician care literalmente jonglează cu problemele din culegerea „Hristev", mi-a atras atenția asupra unei probleme care merită pe lîngă un premiu de tinerețe (că doar este pentru clasele IX, X) și unul de frumusețe.

Să vedem, deci, de ce !

Mai întîi să-i schimbăm cumva enunţul făcîndu-l mai potrivit titlului, adică mai... lunecos :

Pe-un plan înclinat,
De la „$h$" lansat,
Micul Iliuţă
Cu o săniuţă
Merge — şi pe şes —
La distanţa „$s$"
De punctul plecării
(Locul proiectării
Pe orizontală).
Pe-ntreaga mişcare,
Valoarea-i egală
Pentru „$\mu$"-ul care
E-un raport ales :
Între „$h$" şi „$s$".

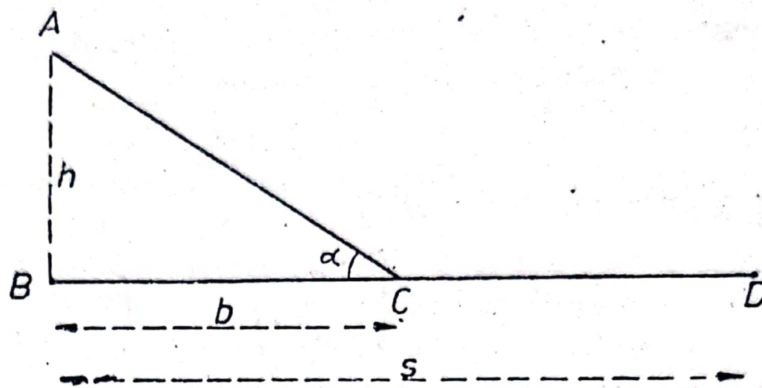



Fig. 46

Enunţul acesta mai puţin obişnuit ascunde desigur problema 1.3.126 din sus-amintita culegere. Pentru mai buna-i înţelegere ca şi pentru economie de spaţiu i-am durat alături şi figura corespunzătoare, a 46-a din lucrare.

Pentru rezolvarea „catalizată" a acestei probleme este necesar acum să se precizeze unele notaţii :

(1) $$h = AB\,;\ b = BC\,;\ s = b + CD = BD$$

Aplicînd săniuţei legea a doua (a lui Newton care probabil îşi punea întrebări extraordinare chiar cînd se juca cu săniuţa), în retorta rezolvării îşi fac apariţia primii „catalizatori" (pe care nu-i vom mai nominaliza) :

(2) $$ma = mg \sin\alpha - \mu \cdot mg \cos\alpha$$

de unde prin „dispariţia" primului catalizator, $m$, se obţine

(3) $$a = g(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)$$

Planul înclinat de lungime $AC$ este parcurs de Iliuţă în mişcare uniform accelerată şi deci

(4) $$AC = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

(a intrat în scenă un nou „catalizator" : $t$) de unde rezultă $t$.

Nu ştiu dacă „săniorul" Iliuţă ştie, dar cititorul meu trebuie să ştie neapărat că viteza atinsă de săniuţă în $C$, adică $v_c$, constituie viteza iniţială pentru mişcarea uniform încetinită de pe porţiunea

orizontală (de pe „şes"). Ţinînd seama de toate relaţiile precedente, această viteză are expresia :

$$(5) \quad v_c = at = a\sqrt{\frac{2AC}{a}} = \sqrt{2a \cdot AC} = \sqrt{2g(AC \sin\alpha - \mu AC \cos\alpha)} =$$

$$= \sqrt{2g(h - \mu \cdot b)}$$

Din acest moment sîntem la „şes" adică pe porţiunea pe care singura forţă care acţionează asupra săniuţei este cea de frecare cu pîrtia. „Muntele" Newton ne dă şi pentru această porţiune de „şes" o relaţie (atenţie la noul „catalizator" !) :

$$(6) \quad ma' = \mu mg$$

de unde rezultă $a'$. Mişcarea pe această porţiune fiind uniform încetinită, în punctul $D$ viteza săniuţei se anulează, adică

$$(7) \quad v_c - a't' = 0$$

de unde rezultă $t'$, un „catalizator" care nici n-a intrat bine în „reacţie" şi se şi pregăteşte să dispară.

Cunoscînd pe $v_c$, $a'$, $t'$ se poate calcula $CD$ care ne promite o reuniune a mărimilor ce trebuie să rămînă în final. Pornind de la (6) şi (7),

$$(8) \quad CD = v_c \cdot t' - \frac{1}{2} \cdot a' \cdot t'^2 = \ldots$$

$$= \frac{v_c^2}{2\mu g} = \frac{2g(h - \mu \cdot b)}{2\mu g} = \frac{h}{\mu} - b.$$

Prin urmare, după o suită de separări urmate de dispariţii de elemente printre care şi $g$, s-a juns la

$$(9) \quad CD = s - b = \frac{h}{\mu} - b \Leftrightarrow \mu \cdot = \frac{h}{s}$$

adică la „un raport ales".

Fireşte — s-ar putea spune în încheiere — în mai toate problemele rezolvate pe lumea asta există elemente care apar numai pe parcursul rezolvărilor neapărînd în produsul final al acestora — rezultatul. În acest sens ar părea că figura de stil „catalizată" este general valabilă. Este adevărat, dar cele două probleme „dezbătute" poartă mai cu pregnanţă această emblemă.

P.S. Elevul care a participat la rezolvarea acestei probleme a făcut în final o observaţie... elevată ce merită a fi, fireşte, relevată.

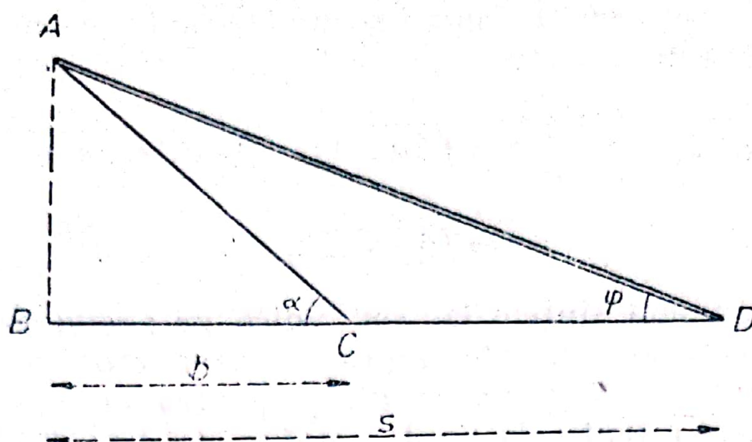



Fig. 47

Pornind de la valoarea lui $\mu = \frac{h}{s}$ („raportul ales"), a remarcat că aceasta reprezintă tangenta unghiului de frecare corespunzînd planului înclinat *AD* (fig. 47). Cu alte cuvinte, mişcările studiate de noi pe porţiunile *AC* (accelerată) şi *CD* (încetinită) cu acelaşi coeficient de frecare $\mu = \frac{h}{s}$, duc la acelaşi „punct de sosire", *D*, ca şi mişcarea uniformă $\left(\text{cu acelaşi coeficient de frecare } \mu = \frac{h}{s} = \operatorname{tg} \varphi\right)$ de pe planul *AD*.

## 31. DEPLASĂRI LA 1 000° C... SAU „O PROBLEMĂ DE CREŞTEREA CRISTALELOR"

Problema aceasta priveşte una din principalele mele activităţi de fizician : obţinerea unor cristale cu proprietăţi speciale. Pentru a înţelege mai bine rostul problemei, pe care mi-am pus-o chiar într-un moment al acestei activităţi, voi reda foarte pe scurt geometria procesului de creştere a unui cristal. Mai întîi însă două cuvinte despre fizica procesului : în anumite condiţii de temperatură, dacă se introduce într-o topitură, aflată într-un creuzet, un „cristălaş" (germen) din aceeaşi substanţă ca topitura, în jurul acestuia se înfiripă un cristal aproximativ de formă cilindrică de dimensiuni direct influenţate de către „crescător". Dar să examinăm figura 48 care are pretenţia să lămurească geometria

procesului de creștere, jalonîndu-i doar începutul și sfîrșitul și care totodată generează problema de care ne vom ocupa.

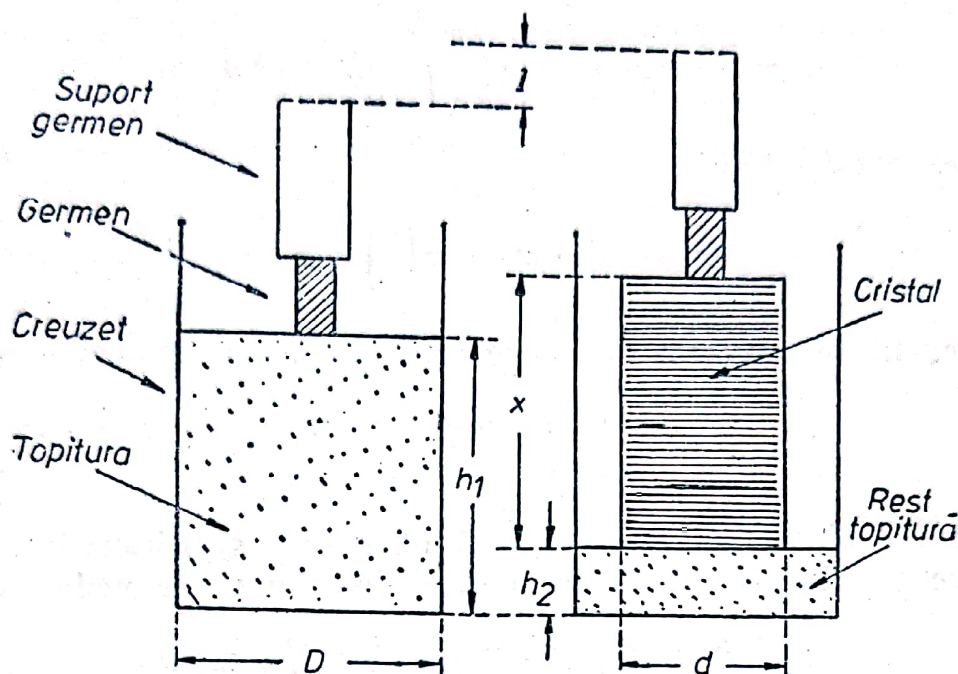



Fig. 48

Ce reprezintă diferitele notații de pe figură ?

$D$ — diametrul creuzetului cunoscut în prealabil (deci precis)

$d$ — diametrul cristalului estimat de la distanță (deci estimativ)

$h_1$ — nivelul topiturii în momentul începerii creșterii

$h_2$ — nivelul topiturii după ce creșterea a luat sfîrșit;

$x$ — lungimea cristalului;

$l$ — distanța pe care s-a deplasat capătul tijei port-cristal cît timp a crescut cristalul (accesibilă observației precise);

Problema care se pune practic, este de a putea estima lungimea cristalului funcție de deplasarea $l$ a capătului superior al tijei (aflat în „aer liber"). De aici se poate merge mai departe și găsi o relație precisă între cele două mărimi. Și cum nu putem para folosirea parametrilor, aceștia vor fi, evident cele două diametre mai sus-menționatnotate, la care se vor adăuga alții.

Primul proces fizic care trebuie pus pe „note" matematice este trecerea topiturii dintre nivelele $h_1$ și $h_2$, prin procesul de creștere, în cristalul presupus de formă aproximativ cilindrică (cu diametrul $d$ și înălțimea $x$). Vom scrie deci egalitatea maselor de substanță care trec una în cealaltă (din faza lichidă în cea solidă), neglijind pierderile care se produc prin evaporare. Cu această ocazie

își fac simțită prezența alți doi parametri: densitatea topiturii și densitatea cristalului, $\rho_t$ respectiv $\rho_c$. Așadar masa topiturii va fi:

$$(1) \qquad m_t = V_t \cdot \rho_t = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot (h_1 - h_2) \cdot \rho_t$$

iar cea a cristalului

$$(2) \qquad m_c = V_c \cdot \rho_c = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot x \cdot \rho_c$$

Din egalitatea acestor mase rezultă pentru $x$ o primă relație:

$$(3) \qquad x = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \cdot \frac{\rho_t}{\rho_c} \cdot (h_1 - h_2)$$

Mai departe greul nu este să observăm ce observăm, ci să știm ce trebuie să observăm. Examinînd figura se vede ușor că

$$(4) \qquad l = h_2 + x - h_1 \Leftrightarrow x = l + (h_1 - h_2)$$

Din (3) se scoate $(h_1 - h_2)$ și se înlocuiește în (4) astfel că după cîteva operații se stabilește

$$(5) \qquad x = l \cdot \frac{D^2 \cdot \rho_t}{D^2 \cdot \rho_t - d^2 \cdot \rho_c}.$$

Prima concluzie rezultată la prima vedere din (5) este că $x > l$. Dar relația se pretează încă la discuții interesante. Pentru a le purta poate ar fi mai bine să fie pusă sub forma următoare:

$$(6) \qquad x = l \cdot \left(1 + \frac{d^2 \cdot \rho_c}{D^2 \cdot \rho_t - d^2 \cdot \rho_c}\right)$$

care ne ajută să observăm mai ușor că:

1) dacă diametrul cristalului — $d$ — este mic, $x$ diferă foarte puțin de $l$, ajungînd să se confunde cu el cînd diametrul respectiv devine... zero;

2) dacă $d = \frac{D}{2}$ (pătrundem în „imperiul adevărului" cu acest caz de mijloc) rezultă $x = l \cdot 4\rho_t/(4\rho_t - \rho_c)$ care în cazul cînd $\rho_t = \rho_c$ devine $x = \frac{4}{3} \cdot l$ (marea majoritate a cazurilor întîlnite în practică se situează în vecinătatea acestei valori „mediocre");

3) cînd diametrul cristalului se apropie de cel al creuzetului (ceea ce în cele mai multe cazuri are consecințe „necristaline“ asupra cristalului însă noi trebuie să-l luăm în considerație ca pe un caz extrem, posibil), $x$ poate să fie de multe ori mai mare decît $l$, ajungînd să fie, pentru cazul teoretic cînd $d = D$, $x = l \cdot \rho_t/(\rho_t - \rho_c)$; dacă $\rho_t \sim \rho_c$, ceea ce cam corespunde realității, $x$ este mai mare decît $l$ de un număr infinit de ori (? !) ; culmea este că această găselniță teoretică beneficiază de o interpretare fizică plauzibilă întrucît este ca și cum întreaga masă a topiturii s-ar transforma brusc în cristal astfel că $x$ dobîndește valoarea finală în timp ce $l$ pur și simplu nu există.

În loc de încheiere aș... cristaliza în cîteva cuvinte importanța practică a celor expuse pînă aici : în procesul de creștere a unui cristal, din cînd în cînd cercetătorul trebuie să știe lungimea dobîndită de cristal pînă în acel moment ; în acest scop nu are decît să-și noteze pe ... manșetă relația (5), să aprecieze cît mai fidel diametrul $d$ (de la circa 20 cm distanță) și profitînd de „cunoștința“ celorlalte mărimi din relație precum și de (măcar) un calculator de coșniță, să-l calculeze pe „$x$“.

## 32. CINCI PROBLEME ÎNTR-UNA SINGURĂ... SAU „DIN MINUNILE TETRAEDRULUI“

La „recapitulativele“ din manualul „contemporan“ de geometrie și trigonometrie de clasa a X-a (1984), la numărul 42, m-am confruntat cîndva cu această problemă pe care v-o aduc la cunoștință (celor interesați...) :

„Să se demonstreze că dacă într-un tetraedru ariile fețelor sînt egale, atunci fiecare muchie este congruentă cu muchia opusă.“

Am cules această problemă pentru „peripeții“ deoarece :

— era penurie de probleme „spațiale“

— era cu steluță...

— s-a dovedit foarte frumoasă în ansamblu și de-a dreptul palpitantă pe subansamble, după cum se va vedea

— tratează despre tetraedru, acest

Volum descris, prin translatare,
De un triunghi — făcut din gheață —
Pierzînd constant din suprafață
În zborul lui frontal spre soare...

Negăsind soluția în timp util, am dat iarăși fuga la celebra culegere a marelui nostru Țițeica. Și pomul lăudat a fost de... lăudat căci am descoperit problema respectivă la nr. 947. Rezol-

varea este însă astfel schițată de către autor, încît practic fiecare frază a ei poate fi considerată o problemă de sine stătătoare. Spre „revolvilustrare" voi reproduce întocmai această soluție încercînd să o „parcelez" pe problemele „văzute" de mine:

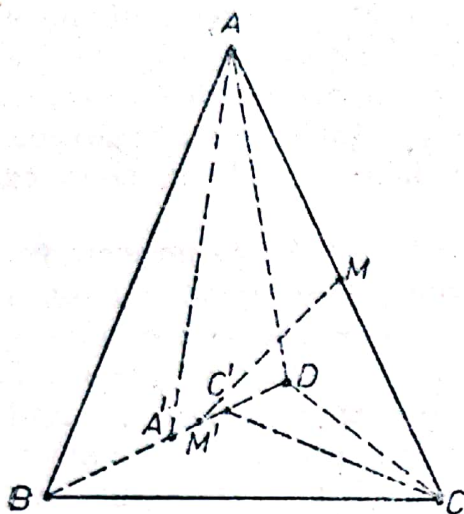


Fig. 49

1) „Se duce $AA' \perp BD$, $CC' \perp BD$ (fig. 49). Fie $M$ mijlocul lui $AC$, $M'$ al lui $A'C'$. Se va observa că $M'A = M'C$ și de aici $MM' \perp AC$". Iată prima subproblemă! S-o rezolvăm! Din egalitatea ariilor triunghiurilor $ABD$ și $BCD$ rezultă $AA' = CC'$ (baza fiind comună). Triunghiurile dreptunghice $AA'M'$ și $CC'M'$ fiind congruente, rezultă $M'A = M'C$. Aceasta înseamnă că triunghiul $AM'C$ este isoscel și $MM' \perp AC$.

2) „Deoarece $A'$, $C'$ sînt proiecțiile lui $A$ și $C$, $M'$ va fi proiecția lui $M$, deci $MM' \perp BD$. Așadar $MM'$ este perpendiculara comună muchiilor $AC$ și $BD$." Și aici este, zic eu, o problemă care s-ar rezolva astfel: dacă un segment își proiectează capetele pe o dreaptă, el își va proiecta mijlocul (după cum se poate arăta folosind plane perpendiculare pe acea dreaptă) desigur în mijlocul segmentului determinat de proiecțiile capetelor; deci $MM' \perp BD$, adică $MM'$ este perpendiculara comună muchiilor $AC$ și $BD$. Perpendiculara comună! Nu-i deloc comună! După părerea mea ar trebui să vedem în ea floarea de colț a geometriei în spațiu...

3) „Din cauza simetriei și deoarece perpendiculara comună a două drepte e unică, $M'$ este mijlocul lui $BD$." Am separat aici cea mai distinsă dintre subproblemele pe care le distingem în soluția „Țițeica". Simetria de care vorbește autorul ne sugerează inversarea rolurilor de pînă acum ale muchiilor $AC$ și $BD$. Într-adevăr, proiectînd elementele lui $BD$ pe $AC$ și notînd cu un prezumtiv $M''$ analogul lui $M'$ pe $AC$ și cu $N$ mijlocul lui $BD$ se ajunge la o... nouă perpendiculară comună pentru $AC$ și $BD$, de data aceasta $NM''$ (se-nțelege că am luat în considerație acum egalitatea ariilor triunghiurilor $ABC$ și $ACD$). Dar „e una, numai una" perpendiculara comună așa că $N$ se confundă cu $M'$ care este deci și mijlocul muchiei $DB$. Cu acest fruct al „florii de colț" să vedem mai departe soluția.

4) „... deci $AB = CD$". Aceste ultime cuvinte ale soluției — Țițeica ar putea părea la prima vedere drept un fel de colac peste pupăză: se lucrează tot timpul cu $AC$ și $BD$ și apoi, ca-ntr-un

final neașteptat de epigramă, se conchide congruența altor muchii. În realitate lucrurile stau astfel: faptul că $M'$ este mijlocul nu numai al lui $A'C'$, ci și al lui $BD$, face ca $A'B = C'D$ și deci ca triunghiurile $AA'B$ și $CC'D$ să fie congruente; de aici „surpriza" $AB = CD$.

5) Deoarece textul soluției „Țițeica" a fost epuizat, cea de-a 5-a „problemă" este de fapt o completare personală, a cărei verificare rapidă o las, pentru a cîta oară, în seama cititorului: fețele acestui deosebit tetraedru nu sînt numai echivalente ci și congruente.

Incontestabila frumusețe a acestei probleme mi-a demonstrat o dată în plus că tetraedrul — pe care l-am definit la început ca pe un triunghi ce îndepărtîndu-se de planul său își pierde constant din suprafață — este pentru geometria în spațiu ceea ce este triunghiul pentru geometria plană: figura vedetă. Nu degeaba în rețeaua cristalină a diamantului atomii sînt dispuși în vîrfuri de tetraedre...

## 33. FILE DE TERMOELECTRICITATE PRACTICĂ... SAU „CUM PUTEM FOLOSI MAI COMOD UN TERMOCUPLU"

Este foarte posibil ca viitorul fizician să fie confruntat cu următoarea problemă: dispunînd de un termocuplu simplu, de cuvenitul milivoltmetru și de un termometru 0—100°C gradat și în zecimi de grad, cum va proceda spre a determina precis temperatura?

Pentru a rezolva această problemă, se cuvine mai întîi să arătăm pe scurt ce-i acela un termocuplu simplu ținînd seama de faptul că elevii claselor a IX-a nu au făcut cunoștință cu el (accesibilitatea înțelegerii dispozitivului ne ajută să devansăm momentul acestei cunoștințe). Termocuplul (i se mai spune și termoelement) este un dispozitiv constituit din două fire conductoare (sau semiconductoare) diferite, sudate la capete; dacă temperaturile celor două contacte sînt diferite termocuplul poate fi folosit ca traductor termoelectric la măsurarea diferențelor de temperatură. Pentru aceasta se determină forța termoelectromotoare care ia naștere prin transformarea energiei termice în energie electrică în regiunea sudurilor (prin efectul Seebeck). Un astfel de termocuplu, transformat în pirometru (instrument de măsurat temperatura) electric prin introducerea unui milivoltmetru într-una din ramurile sale, este reprezentat în figura 50 în care una din suduri este introdusă în corpul $C$ a cărui temperatură trebuie măsurată, iar cealaltă se găsește într-un amestec de apă cu gheață, $M$. Această ultimă

sudură poate fi pusă în contact cu orice alt corp la orice altă temperatură (chiar pe același corp $C$ dacă are o porțiune la altă temperatură) și avem de-a face în acest caz cu un termocuplu diferențial.

Problema noastră însă „dispune" de un termocuplu simplu, format din două ramuri, ca acela din figura 51, care folosește în general pentru măsurători de mică precizie. Și tocmai cu acest „neisprăvit" trebuie să se facă măsurători din celelalte... A fost ales însă datorită unei calități evidente: necerînd a doua sudură și mai ales vasul dewar cu gheață, este de o comoditate irezistibilă. Dar să-l cunoaștem mai bine! Îl vom reprezenta în figura 52 prin conductorii $a$ și $e$ a căror sudură se află la temperatura $t_1$. Capetele libere ale acestor conductori se leagă prin intermediul conductorilor obișnuiți $b$ și $d$ la bornele milivoltmetrului, care constituie „conductorul" $c$ al circuitului. Pe figură sînt marcate și temperaturile celor patru legături: $t_2$, $t_3$, $t_4$, $t_5$. Notînd cu $(E_{ab})_t$ tensiunea termoelectromotoare (t.t.e.m.) a circuitului format din doi conductori $a$ și $b$ a căror sudură (sau lipitură) se află la temperatura $t$, se poate scrie pentru întreg circuitul din figura 52:

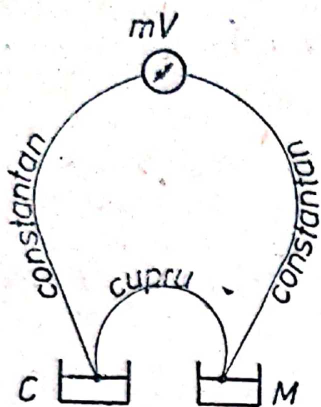



Fig. 50




Fig. 51

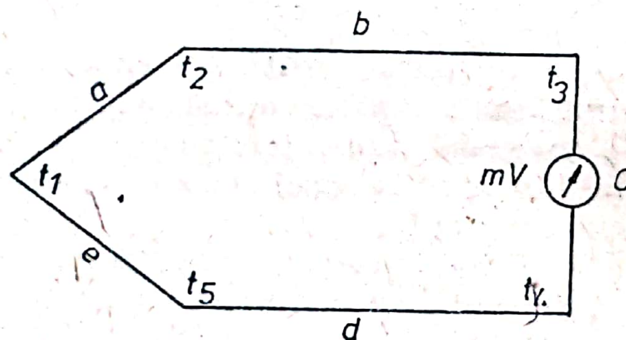



Fig 52

(1) $$E = (E_{ea})_{t_1} + (E_{ab})_{t_2} + (E_{bc})_{t_3} + (E_{cd})_{t_4} + (E_{de})_{t_5}$$

Dacă $t_2 = t_3$, evident

(2) $$(E_{ab})_{t_2} + (E_{bc})_{t_3} = (E_{ac})_{t_2}$$

iar dacă $t_2 = t_3 = t_4$ vom consemna

(3) $$(E_{ac})_{t_2} + (E_{cd})_{t_4} = (E_{ad})_{t_2}.$$

în cele din urmă, dacă $t_2 = t_3 = t_4 = t$,

$$(4) \qquad (E_{ad})_{t_2} + (E_{de})_{t_2} = (E_{ae})_{t_2}.$$

Prin însumarea egalităților (2), (3), (4) termen cu termen și scăderea sumei din (1), se obține:

$$(5) \qquad E = (E_{ea})_{t_1} + (E_{ae})_{t_2}.$$

Prin urmare, dacă se menține constantă și egală cu $t_2$ temperatura contactelor *ab*, *bc*, *cd* și *de*, tensiunea termoelectromotoare (t.t.e.m.) a circuitului se compune din t.t.e.m. ale contactelor $(ae)_{t_2}$ și $(ea)_{t_1}$. Evident, aceste două tensiuni care au supraviețuit „masacrului" din calculele de mai sus, sînt de semne diferite, astfel că tensiunea totală $E$ va fi proporțională cu diferența de temperatură $t_1 - t_2$. Această diferență este cea pe care o evaluăm după citirea lui $E$ pe scala milivoltmetrului și după ce, urmărind tabelele referitoare la termocuplul respectiv, găsim temperatura corespunzătoare t.t.e.m., $E$*.

Necazul este că termocuplul nostru (simplu) nu ne dă temperatura dorită, $t_1$, ci diferența de temperatură dintre punctul de interes (care trebuie măsurată în raport cu 0°C) și un punct a cărui temperatură ne scapă (poate să fie temperatura camerei sau oricare altă sub 100°C în funcție de cît de departe se află punctele *2* și *5* de vreo sursă de căldură). Din termo-impasul în care ne aflăm ne scoate termometrul de care mai „dispune" problema noastră. Plasîndu-l cît mai aproape de contactele *2* și *5* ne va arăta, cu aproximație de o zecime de grad, temperatura $t_2$. Cum din indicațiile milivoltmetrului (care poate fi gradat direct în ... grade) cunoaștem deja $t_1 - t_2$, nu ne mai rămîne pentru a rezolva problema, decît pasul cel mai greu: $t_1 - t_2 + t_2 = ?$

Și astfel am determinat $t_1$ comod (lipsește ancombrantul vas dewar cu apă și gheață) și precis (citind simultan ambele temperaturi).

## 34. PROBLEMĂ CU O COMOARĂ... SAU „DIN MIRACOLELE LUI $\sqrt{-1}$ ȘI TEOREMEI COSINUSURILOR"

O comoară de problemă am întîlnit în cartea lui George Gamow „UNU DOI TREI... INFINIT" (Editura Tineretului, 1958). Comoară nu fiindcă este vorba acolo de o comoară-comoară,

---

* Este în fond o chestiune de bun simț a înțelege că pentru aceeași $t_1 - t_2$, diferite termocupluri (conductori *a*, *e* din diferite metale) vor da valori diferite pentru $E$. (n. a.)

ci fiindcă, după cum însuşi autorul o spune, rezolvarea ei ne dezvăluie unele din virtuţile magicului număr imaginar (şi „ultrarevoluţionar") $\sqrt{-1}$. Şi cum pînă acum nu am avut treabă cu numerele complexe, să profităm de ocazie ca să atingem şi acest domeniu, mai ales că este vorba despre... ce este vorba. Dacă adăugaţi că am ajuns şi personal la descoperirea comorii — chiar aşa ! — prin teorema cosinusurilor, veţi înţelege că dreptul acestei probleme de a face parte din lucrare este deplin.

Fie deci reprodus din captivanta carte amintită, fragmentul-problemă care ne va purta „spre alte zări mai calde".

„Se zice că a existat odată un tînăr îndrăzneţ care a descoperit printre hîrtiile străbunicului său o bucată de pergament ce dezvăluia poziţia unei comori ascunse. Indicaţiile conţinute în acest document erau următoarele: „Navighează spre... latitudine nordică şi... longitudine vestică unde vei găsi o insulă părăsită (În document erau indicate longitudinea şi latitudinea exacte ; le-am omis însă intenţionat pentru a păstra secretul). Acolo vei afla o cîmpie largă pe malul nordic al insulei unde se înaltă un singur stejar şi un singur pin (Cu aceeaşi intenţie am schimbat şi numele copacilor. Pe o insulă tropicală există desigur alte varietăţi de copaci.). Vei vedea de asemenea o veche spînzurătoare de care erau spînzuraţi altă dată trădătorii. Porneşte de la spînzurătoare şi mergi spre stejar numărîndu-ţi paşii. În dreptul stejarului trebuie să te întorci la dreapta cu 90° şi să parcurgi acelaşi număr de paşi. Înfige un ţăruş în pămînt în locul acela. Acum trebuie să te întorci la spînzurătoare şi să mergi spre pin numărîndu-ţi paşii. În dreptul pinului trebuie să te întorci la stînga cu 90°, să parcurgi acelaşi număr de paşi şi să înfigi un alt ţăruş în pămînt. Sapă la jumătatea distanţei dintre ţăruşi : acolo vei găsi comoara".

Instrucţiunile erau destul de clare şi explicite astfel că tînărul nostru erou s-a îmbarcat pe un vapor şi a pornit către mările sudului. El descoperi insula, cîmpia, stejarul şi pinul, dar spre marea lui durere, spînzurătoarea dispăruse. Prea mult timp trecuse de la redactarea documentului şi ploaia, soarele şi vîntul distruseseră lemnul, fără a lăsa măcar o urmă a locului unde se înălţase pe vremuri spînzurătoarea.

Disperat, tînărul începu să sape la întîmplare în lungul şi latul insulei. Dar toate eforturile sale au fost zadarnice, căci insula era prea mare. Neavînd încotro, trebui să se întoarcă cu mîinile goale, iar comoara a rămas probabil pînă în zilele noastre îngropată în ascunzişul ei.

Este, desigur, o poveste tristă cu atît mai mult cu cît tînărul ar fi putut să găsească comoara mult dorită dacă ar fi ştiut puţină matematică şi, mai ales, întrebuinţarea numerelor imaginare. Să

încercăm să vedem dacă putem descoperi noi comoara pentru el, deși este prea tîrziu ca să-i mai fim de folos.

Să considerăm insula ca o suprafață plană compusă dintr-un număr infinit de numere complexe. Trasăm o axă (axa reală)

Fig. 53

care trece prin baza celor doi copaci și o altă axă (axa imaginară) perpendiculară pe prima într-un punct așezat la jumătatea distanței dintre copaci (fig. 53). Luînd ca unitate de lungime jumătate din distanța dintre copaci, putem spune că stejarul este plasat în punctul $+1$ de pe axa reală, iar pinul în punctul $-1$. Nu cunoaștem locul în care se afla spînzurătoarea și de aceea vom nota poziția ei ipotetică prin litera grecească $\Gamma$ (gama mare), care seamănă dealtfel cu o spînzurătoare. Cum spînzurătoarea nu era așezată neapărat pe una din cele două axe, trebuie să considerăm $\Gamma$ ca fiind un număr complex $\Gamma = a + bi$ unde semnificația lui $a$ și $b$ poate fi dedusă din figura 53.

Să facem acum cîteva calcule simple, ținînd cont de regulile înmulțirii imaginare... Dacă spînzurătoarea se găsește în punctul $\Gamma$, iar pinul în punctul $-1$, distanța și direcția dintre ele poate fi notată prin $(-1) - \Gamma = -(1 + \Gamma)$. În mod asemănător, distanța dintre spînzurătoare și stejar este $1 - \Gamma$. Pentru a roti aceste două lungimi în sensul acelor ceasornicului (spre dreapta) și în sens contrar acelor ceasornicului (spre stînga), trebuie, conform regulilor de mai sus (ale înmulțirii imaginare — n.a.), să le înmulțim cu $-i$ și cu $i$, aflînd astfel locurile în care trebuie să înfigem cei doi țăruși, după cum urmează. :

primul țăruș : $(-i)[-(1 + \Gamma)] - 1 = i(\Gamma + 1) - 1$

al doilea țăruș : $(+i)(1 - \Gamma) + 1 = i(1 - \Gamma) + 1$

Cum comoara se găsește la jumătatea distanței dintre țăruși, trebuie să stabilim acum jumătatea sumei numerelor complexe de mai sus. Obținem astfel:

$$\frac{1}{2}[i(\Gamma+1)-1+i(1-\Gamma)+1]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[i\Gamma+i-1+i-i\Gamma+1\right]=\frac{1}{2}(+2i)=+i$$

Observăm cu această ocazie că poziția ipotetică a spînzurătorii, notată prin $\Gamma$, a fost eliminată în cursul calculelor noastre și că, indiferent de poziția spînzurătorii, comoara trebuie să se găsească în punctul $+i$.

Iată deci că dacă ar fi putut face acest simplu calcul matematic, eroul nostru nu ar fi avut nevoie să sape insula în lung și în lat, ci ar fi căutat-o în punctul indicat printr-o cruce în figura 53 și ar fi fi găsit-o acolo.

Dacă mai aveți vreo îndoială în ceea ce privește inutilitatea cunoașterii poziției spînzurătorii pentru a descoperi comoara, însemnați pe o bucată de hîrtie poziția celor doi copaci și încercați să executați indicațiile din vechiul document, luînd pentru spînzurătoare diferite poziții. Oricît ați încerca în această direcție, veți obține întotdeauna același rezultat, corespunzînd punctului $+i$ de pe planul nostru".

Cu această indicație de probă am încheiat „micul" citat care ne-a interesat din cartea lui Gamow. Dar tocmai indicația asta impune o întrebare: de ce să facem sus-numita verificare prin măsurători pe hîrtie? Ne-ar trebui o prea mare grijă și o trusă pretențioasă de instrumente. De ce n-am verifica geometric?

Într-adevăr transpunerea problemei în limbaj geometric se poate face numaidecît. Stejarul, pinul și spînzurătoarea dispar, transformîndu-se în puncte. Întrucît habar n-avem unde se găsește, punctul-spînzurătoare îl vom nota cu $M$ (invariabilul „punct variabil" din geometrie). Punctul-stejar îl notăm cu $S$ și punctul-pin cu $P$. Deci geometric problema va suna astfel:

„Fie segmentul $SP$ fix și un punct variabil $M$ într-un plan conținînd segmentul. Se duce $SA \perp SM$ astfel încît $(SA) \equiv (SM)$ și analog $PB$ față de $PM$. Să se arate că mijlocul segmentului $AB$ este un punct fix și să i se precizeze poziția față și funcție de $SP$".

Problema se poate rezolva exclusiv geometric* prin teorema generalizată a lui Pitagora, care este mult mai comodă dacă o folosim în haină trigonometrică, adică sub formă de teorema cosinusurilor.

---

* Vezi și V. Bobancu, *Caleidoscop matematic*, Edit. Albatros, 1979, prob. 34, p. 67 (n.a.).

În figura 54 care concentrează datele de mai sus, mai fie $N$ mijlocul lui $AB$ (l-am notat cu inițiala de la... „nemișcat“). Să calculăm $PN$ ca mediană în triunghiul $ABP$. Vom avea deci

$$PN^2 = \frac{AP^2+BP^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \tag{1}$$

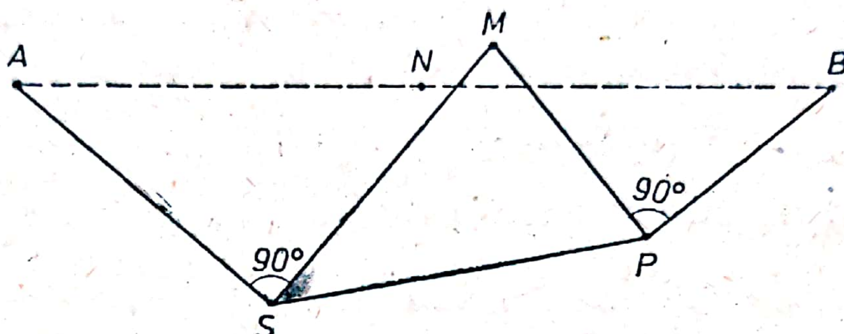



Fig. 54

relație în care vom ține seama de o groază de elemente : $BP = MP$; $BM = \sqrt{2}\ MP$; $AP$ se calculează din $\Delta APS$ prin „cosinusurilor“, idem $AB$ din $\Delta ABM$, calcule în care vom ține seama de $AS = MS$ și $AM = \sqrt{2}.MS$. Intenția noastră e clară : vrem să exprimăm totul prin $MP$, $MS$ și $\widehat{M}$.

Din $\Delta APS$, prin teorema cosinusurilor și ținînd seama de datele de mai sus la care se adaugă $\cos\ \widehat{(ASP)} = \cos\ (\widehat{S} + 90°) = -\sin\ \widehat{S}$, rezultă

$$AP^2 = MS^2 + PS^2 + 2\ MS\ .\ MP\ .\ \sin\ \widehat{M} \tag{2}$$

unde am ținut seama și de teorema sinusurilor în $\Delta MPS$ $\left(\frac{MP}{\sin S} = \frac{PS}{\sin M}\right)$. Analog, din $\Delta\ ABM$ cu $\cos\ \widehat{AMB} = \cos\ (\widehat{M} + 90°) = -\sin\ \widehat{M}$

$$AB^2 = 2\ MP^2 + 2\ MS^2 + 4\ MS\ .\ MP\ .\ \sin\ \widehat{M} \tag{3}$$

Ținînd seama de (2) și (3) ca și de $BP = MP$, relația (1) devine :

$$PN = \frac{1}{\sqrt{2}}\ .\ PS \tag{4}$$

Cum aceeași valoare se obține, analog, pentru $SN$ rezultă că $N$, $P$, $S$ sînt toate vîrfuri ale unui pătrat...

Prin urmare, dacă tînărul căutător de comori ar fi fost „măcar" un bun geometru și ar fi rezolvat la viața lui cîteva probleme cu puncte fixe, și-ar fi pus, poate, problema de mai sus. Rezolvînd-o ar fi ajuns, fatal, la „mortala" concluzie că putea găsi comoara indiferent dacă pe insulă se găseau „0, 1, 2, 3, ... ∞" spînzurători...

Iată ce mare neajuns e să nu cunoști nici numerele imaginare nici teorema cosinusurilor. Într-adevăr pierzi o comoară...

## 35. NEWTON ÎMI FACE GREUTĂȚI... SAU „TOTUL" DESPRE PATRULATERUL CIRCUMSCRIPTIBIL

Teoretic, excelenta carte a lui Viorel Gh. Vodă, *Vraja geometriei demodate*, putea să genereze pentru mine „vrajba familiei demolate"... Practic însă, lucrurile s-au oprit la nivel de vrajbă temporară, căci au fost „numai trei" săptămînile în care n-am pus umărul la nici o trebușoară în gospodărie. În tot acest timp n-am făcut altceva decît încercări disperate de a demonstra TEOREMA LUI NEWTON de al cărei enunț am luat cunoștință din cartea sus-amintită.

Teorema lui Newton ! Cum de nu auzisem de ea pînă la citirea acestei cărți ? Prin urmare Marele Newton a găsit și el niscaiva timp pentru această ramură atît de pasionantă a matematicii care este *Geometria Sintetică*. Faptul că nu prea se știe de această teoremă se datorește — m-am convins — mai marii accesibilități la „misterele" patrulaterului inscriptibil, decît la cele ale patrulaterului circumscriptibil*. Căci la patrulaterul circumscriptibil se referă teorema lui Newton, care spune că „mijloacele diagonalelor acestui patrulater și centrul cercului înscris în el sînt coliniare".

Înainte de a „depăna" demonstrația atît de cronofagă — pentru mine — a acestei teoreme, vreau să dezvălui cîteva mistere ale patrulaterului care se recomandă „peste poate" prin faptul că însuși Marele Newton a catadixit să-i acorde atenție. Reamintesc mai întîi acele date — cele mai remarcabile ale patrulaterului circumscriptibil — care, într-un fel sau altul, rezultă din *Vraja geometriei demodate* (cap. 4, pg. 144 ; anexa IV, C, p. 244) :

— suma a două laturi opuse este egală cu suma celorlalte două ;

---

* Pentru cine este cazul, reamintesc că patrulater circumscriptibil este acela în care se poate înscrie un cerc.

— produsul a două laturi alăturate prin sinusul la pătrat al semiunghiului dintre ele este egal cu produsul similar al celorlalte două laturi ;
— suprafaţa circumscriptibilului este egală cu rădăcina pătrată a produsului tuturor laturilor, înmulţită cu sinusul semisumei a două unghiuri opuse ;
— din proprietatea precedentă rezultă că dacă acest patrulater este şi inscriptibil (patrulaterul „incomplet" complet...), aria sa este radical din produsul laturilor (sinusul amintit fiind egal cu unitatea) ;
— pentru acest patrulater circum-inscriptibil există o relaţie analoagă celebrei relaţii a lui Euler de la triunghi, relaţie stabilită de Carlitz.

Trec acum la datele pe care le-am cules personal. Sursele pe care le-am avut la dispoziţie au fost... una singură şi anume: culegerea de probleme a lui Gh. Ţiţeica, intitulată *Probleme de geometrie* (Ediţia VI-a, 1981), singura culegere în care am găsit probleme referitoare la „părăginitul" patrulater (dar şi aici le numeri pe degetele unei singure mîini ? !).

Din această remarcabilă carte am aflat de existenţa unui „punct" de-a dreptul uimitor : PUNCTUL LUI NEWTON. Acesta este un punct de „aprigă" concurenţă : concură în el atît diagonalele patrulaterului circumscriptibil oarecare, cît şi diagonalele patrulaterului — evident inscriptibil — format de punctele de contact ale primului cu cercul său înscris. Iată cum se demonstrează această remarcabilă proprietate, ca soluţie la problema 535 din culegerea amintită. Pentru a nu lungi cumva demonstraţia precum şi pentru a nu o da mură-n gură cititorului, o voi reproduce cuvînt cu cuvînt din cartea amintită unde este dată puţin cam telegrafic (şi notaţiile sînt cele folosite acolo).

Fie deci cercul şi laturile patrulaterului circumscris ale cărui diagonale $AC$ şi $BD$ (fig. 55) se intersectează cu dreptele care unesc punctele de contact astfel : se notează cu $O$ intersecţia dreptelor $AC$ şi $HF$ şi cu $O'$ intersecţia dreptelor $AC$ şi $EG$. Triunghiurile $AOH$, $CFO$ au două unghiuri egale şi două unghiuri suplimentare. Deci $AH : CF = AO : CO$. Analog obţinem

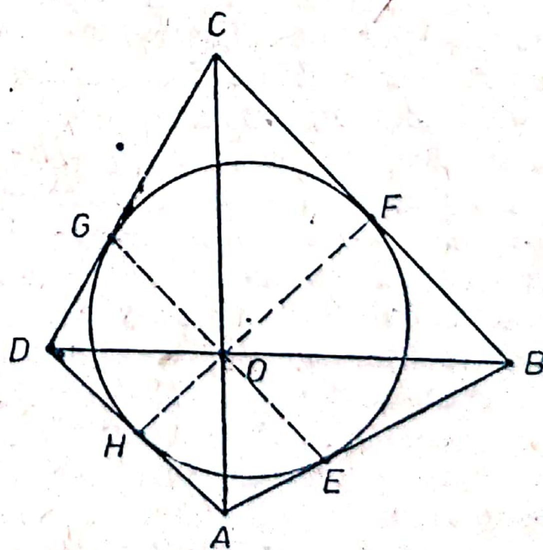


Fig. 55

$AE : CG = AO' : CO'$. Dar $AH = AE$ şi $CF = CG$. Deci $O$ şi $O'$ se confundă în... punctul lui Newton.

Iată acum cîteva observaţii personale, unele chiar banale (dar, poate nostime):

- există o infinitate de patrulatere circumscriptibile care au acelaşi cerc înscris; locul geometric al punctului lui Newton al acestor patrulatere este suprafaţa cercului „unic";
- există o infinitate de patrulatere circumscriptibile care au acelaşi cerc înscris şi acelaşi punct al lui Newton;
- toate elementele unui patrulater circumscriptibil pot fi calculate în funcţie de patru parametri „primari": raza cercului şi unghiurile consecutive dintre cele patru raze la punctele de contact;
- spre deosebire de „inscriptibil" care nu poate depăşi cercul în care este „închis", patrulaterul circumscriptibil poate să-şi arunce un vîrf oricît de departe (mă amuză să-mi imaginez un patrulater circumscris soarelui şi avînd un colţ pe... „Centralul" din Craiova);
- existenţa punctului lui Newton se poate demonstra printr-o construcţie ajutătoare, permiţînd aplicarea teoremei lui Menelaos (ah, această teoremă a lui Menelaos atît de solicitată încît aş ridica-o la rang pitagoreic!); o las în sarcina cititorului.

Şi-acum să atacăm TEOREMA LUI NEWTON.

La anexa III a cărţii *Vraja geometriei demodate*, Viorel Gh. Vodă ne „alege" 25 teoreme de geometrie — vorba vine — demodată, teoreme pe care le enunţă doar, fără a le demonstra. Pe locul 15 am avut surpriza, aşa cum am mai spus, să fac cunoştinţă cu enunţul teoremei lui Newton: „dreapta care uneşte mijloacele diagonalelor unui patrulater circumscris unui cerc, trece prin centrul cercului". A fost pentru mine un şoc chiar, deoarece pînă atunci nici nu visam măcar că Newton ar putea să „semneze" şi pe aici cîte ceva (nu că n-ar fi fost în stare...). La scurt timp după această revelaţie, întrebînd în dreapta şi-n stînga, mi-am dat seama că nu eram singurul care pînă atunci habar nu avusesem de această teoremă. Dar cu toate că am trăit această surpriză, aş zice de proporţii, sau poate tocmai datorită ei, am comis o imprudenţă ce avea să mă aducă în pragul disperării: mi-am închipuit că demonstraţia teoremei purtînd numele cel mai celebru, este un fleac... Atîtea coliniarităţi cîte am demonstrat în viaţa mea (de-aş avea numărul lor pe C.E.C., zău c-ar fi ceva...) m-au determinat să nu iau în serios tocmai ceva emanînd de la cel mai mare Cap al fizicii şi matematicii (?!). Cine-o face ca mine, ca mine să păţească!

Pentru a vedea cititorul ce greutăţi „mi-a făcut Newton" îi voi proiecta întreg filmul „înaltei aventuri" pe care mi-au prilejuit-o „cele trei puncte negre" implicate în coliniaritate. Pe genericul acestui film ţin să menţionez accentuata-mi bănuială că însuşi Newton nu va fi dat o demonstraţie cu mult mai simplă teoremei ce are onoarea să-i poarte numele, iar dacă bănuiala mea este neîntemeiată vreau să menţionez şi certitudinea că filmul peripeţiilor mele „newtoniene" ar fi şi în acest caz presărat cu învăţăminte. Aşadar, motor!

Am început cu verificarea experimentală: executînd o figură îngrijită (ce-aş mai executa şi „figurile" neîngrijite!) am putut constata prin folosirea unei rigle (întîmplător bune) coliniaritatea cu toată claritatea.

Au urmat verificările pe cazuri particulare: trapezul oarecare (cel circumscriptibil) a răspuns imediat pozitiv, iar de trapezul isoscel (cel circumscriptibil) nici n-aş mai vorbi dacă în afară de faptul că are înscris un cerc n-ar fi şi inscriptibil.

O copleşitoare speranţă de rezolvare mi-a dat-o soluţia problemei 536 din aceeaşi memorabilă culegere a lui Gh. Ţiţeica: „Să se demonstreze că dacă se prelungesc laturile opuse ale unui patrulater inscriptibil şi se duc bisectoarele unghiurilor astfel formate, punctul de intersecţie al acestor două drepte şi mijloacele diagonalelor patrulaterului dat sînt coliniare". Precum vedeţi, nici că se putea ceva mai aproape de „of"-ul meu din acel moment! În clipele următoare am devorat pur şi simplu soluţia acestei probleme. Primul lucru care „crapă ochii" (creve les yeux) după parcurgerea soluţiei (cititorul ar face bine să încerce a o găsi), este aplicarea ei „instantanee" la patrulaterul circum-inscriptibil unde punctul de intersecţie al bisectoarelor cu pricina este chiar centrul cercului înscris în patrulater. Această prea rapidă observaţie m-a făcut pentru un timp să cred că teorema lui Newton este valabilă numai în acest sofisticat patrulater (deci că apărea greşit în *Vraja...*). Mi-am adus însă aminte imediat de verificarea experimentală ca şi de trapezul circumscriptibil care-l admitea foarte bine pe Newton, deşi era foarte departe de a fi şi inscriptibil...

Rezolvitorului îi şade bine cu... încercările!

După mai multe, infructuoase, am poposit într-un triunghi oarecare avînd însă bine înşfăcat cercul său înscris. Am construit tangenta la cerc în $T$ (fig. 56), iar aceasta a intersectat laturile $AB$, $AC$ în $E \in (AB)$ şi $F \in (AC)$. În felul acesta, pornind de la o figură geometrică foarte familiară — cercul înscris în triunghi — am ajuns la patrulaterul circumscriptibil ($BEFC$) care, să recunoaştem încă o dată, este o figură ceva mai puţin familiară. În acest context însă, nu mi-a mai apărut atît de inabordabil, astfel

că am observat destul de repede un amănunt ce avea să mă poarte spre victorie: tangenta *ETF* este variabilă între două poziții limită, care nu sînt altele decît laturile *AB*, *AC* ale triunghiului. Cu alte cuvinte, prin confundarea lui $T$ cu $T_1$ sau $T_3$ patrulaterul circumscriptibil *BEFC* devine... triunghiul *ABC*. În cursa sa fără obstacole dintre $T_1$ și $T_3$, punctul de tangență $T$ trece prin poziția în care patrulaterul în chestiune devine trapez circumscriptibil. Cum am mai spus, teorema lui Newton se demonstrează una-două într-un asemenea trapez și ar însemna să-l jignesc pe cititor dacă aş reproduce această demonstrație. Rămîne aşadar de văzut dacă „Newton" este valabil și în cazul triunghiului considerat acum drept produsul final al „metamorfozei" patrulaterului circumscriptibil *BEFC* din figura 56.

Fie cazul limită în care punctul de tangență hoinar $T$ se confundă cu $T_3$. Patrulaterul *BEFC* devenind triunghiul *ABC*, diagonalele lui ajung și ele în poziții limită după cum se vede urmărind „metamorfoza" da capo al fine: diagonala *BF* devine $BT_3$ (fig. 57), iar *CE* devine *CA*. Dacă acest proces geometric de trecere la limită este corect, figura 57 trebuie să se supună teoremei lui Newton care i-ar cere ca mijlocul lui $BT_3$, $Q$, centrul cercului înscris, $O$, și mijlocul lui *CA* să fie coliniare. Fie $N$ acest ultim

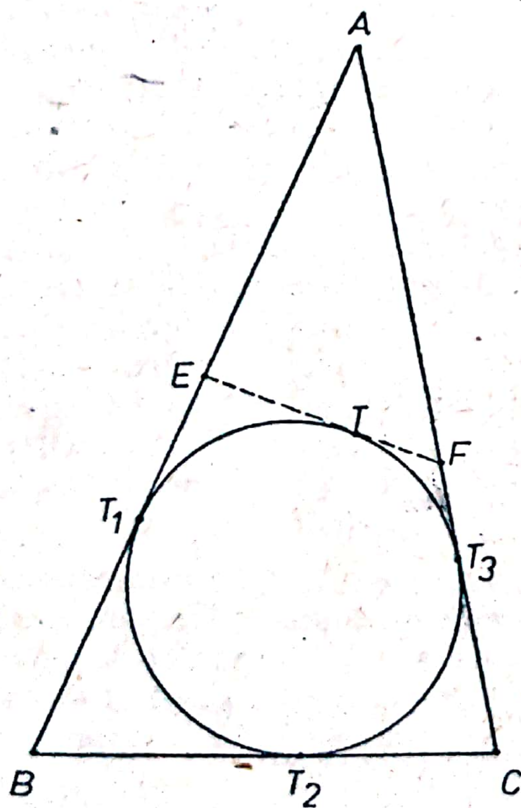


Fig. 56

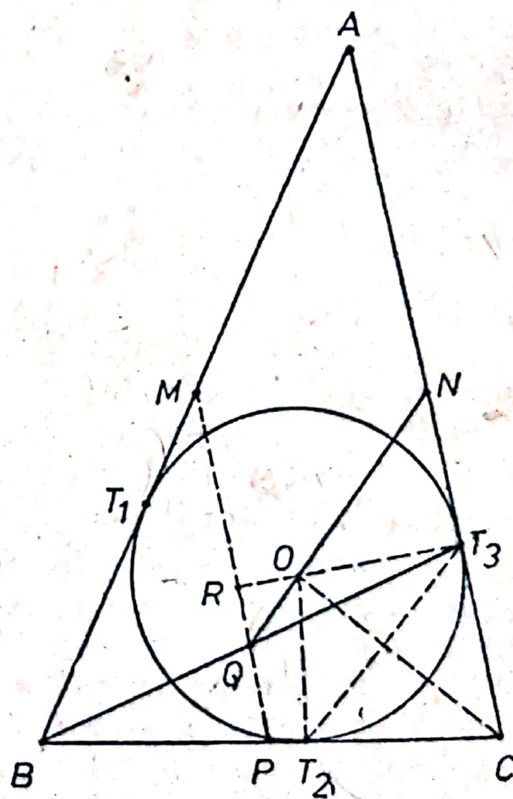


Fig. 57

mijloc şi de asemenea $M$ mijlocul lui $AB$ şi $P$ mijlocul lui $BC$. Cu aceste elemente ale figurii 57 plus punctul $R = OT_3 \cap MP$ să încercăm a arăta că „un triunghi nu este altceva decît un... patrulater circumscriptibil rămas fără un colţ". Cum încercarea moarte n-are...

Pentru toată lumea este clar că acea coliniaritate $(Q, O, N)$ există numai şi numai dacă există relaţia:

(1) $$\frac{NT_3}{QR} = \frac{OT_3}{OR}$$

unde, ţinînd seama de notaţiile clasice din triunghi (inclusiv $m$, $n$, $q$ pentru lungimile segmentelor determinate pe laturile triunghiului de către punctele de contact cu cercul înscris),

$$NT_3 = \frac{1}{2}b - q, \quad QR = q - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{h_b}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}, \quad OR = \frac{1}{2}h_b - r,$$

$OT_3 = r$ şi $q = p - c$, $r = \dfrac{S}{p}$. Cu acest şirag de relaţii, (1) devine:

(2) $$\frac{b - 2q}{q - \sqrt{a^2 - h_b^2}} = \frac{2r}{h_b - 2r} \Rightarrow \frac{b - 2p + 2c}{p - c - a\cos C} = \frac{\frac{2S}{p}}{\frac{2S}{b} - \frac{2S}{p}} = \frac{b}{p - b}$$

relaţie de la care, înlocuind $p = \dfrac{a + b + c}{2}$ şi efectuînd calcule „inreproductibil" de simple, se ajunge la

(3) $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}$$

care nu este altceva decît cunoscuta teoremă a cosinusurilor şi care de multă vreme este... adevărată. Adevărată este deci şi (1) de la care am pornit şi prin care stabilim un adevăr geometric, probabil deja cunoscut, pe care îl putem exprima astfel: într-un triunghi avînd figurat cercul înscris, dreptele care unesc mijloacele laturilor cu mijloacele segmentelor formate de punctele de contact de pe laturile respective şi vîrfurile opuse ale triunghiului, sînt concurente în centrul cercului înscris. Şi astfel am demonstrat „fistichia" teoremă care spune că „un triunghi este un patrulater circumscriptibil cu... trei vîrfuri".

Cele demonstrate mai sus (într-o zi de „13") aveau să mă ducă (a doua zi) la soluţionarea problemei pusă de teorema lui Newton pe care am crezut c-o fac praf în cîteva minute ale unei zile petrecute la Amara...

Acestea fiind spuse, declar deschisă ultima filă — la propriu şi la figurat — a acestui capitol-vedetă al „peripeţiilor".

Din capul... filei ţin să spun că deducerea mult „filatei" coliniarităţi se bazează pe „concurenţa" demonstrată mai sus şi... pe cine altul decît pe cvasi-omniprezentul Menelaos ?

Fie deci patrulaterul $ABCD$, cercul său înscris cu centrul în $O$ şi avînd punctele de contact $T_1 \in (AB)$, $T_2 \in (BC)$, $T_3 \in (CD)$,

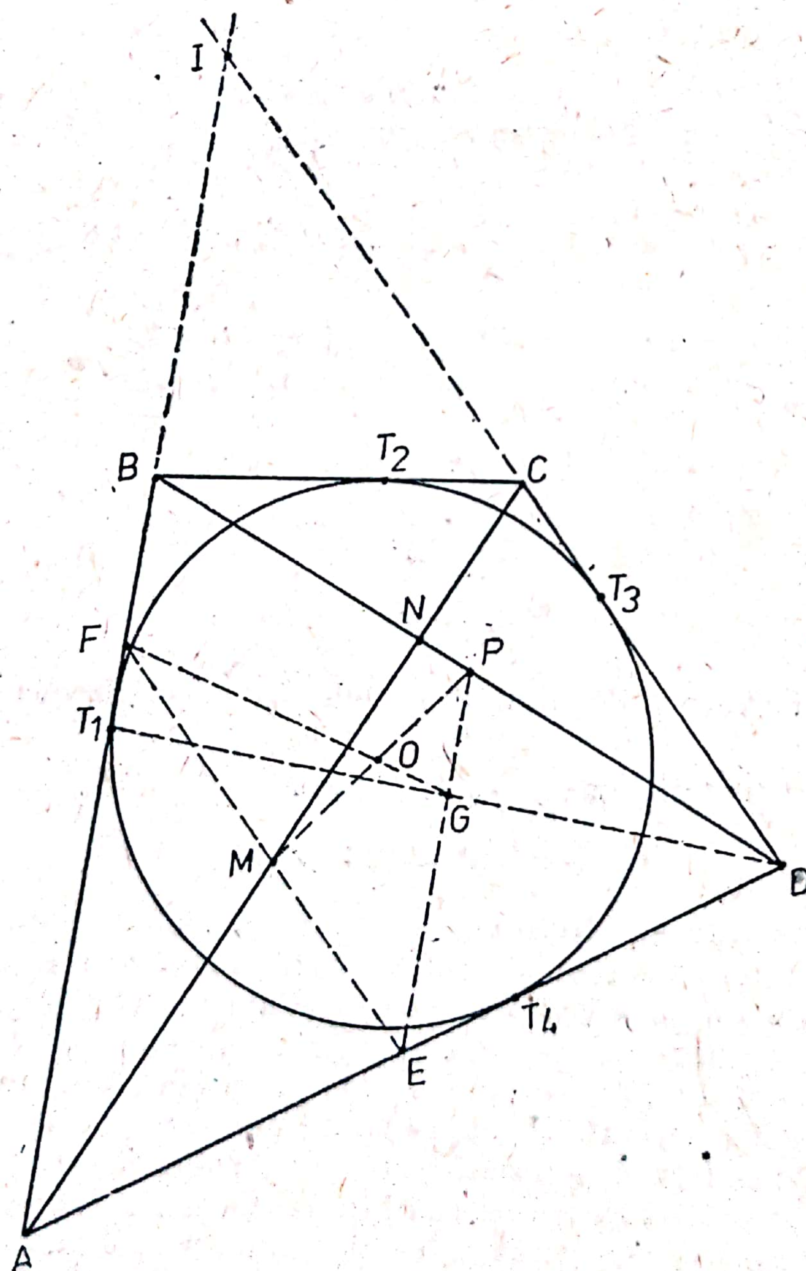


Fig. 58

$T_4 \in (DA)$. Tot între punctele de bază se numără mijloacele diagonalelor: $M \in (AC)$; $P \in (BD)$. Ca puncte secundar-esențiale vom nota mijloacele laturilor $AI$, $DA$, notate cu $F$ respectiv $E$ ($I$ fiind punctul în care se intersectează laturile $AB$, $CD$ prelungite), mijlocul segmentului $DT_1$, $G$. Cu aceasta „deschisă-i calea" ca Menelaos să intre în scenă. Scena preferată de el este „ringul cu trei colțuri" $EFG$. Drept transversală — îmi șoptește — ar prefera-o pe $MOP$, dar tocmai asta e problema: să se arate că $MOP$ este o dreaptă... Și-atunci „bunul grec" își aduce aminte că are și o reciprocă pe care ne-o pune afabil la dispoziție. Figura 58 permite...

Așadar vom aplica triunghiului $EFG$ reciproca teoremei lui Menelaos. Pentru ca punctele $M$, $O$ și $P$ să constituie o transversală (adică să fie coliniare), în acest triunghi trebuie să existe relația:

$$\frac{MF}{ME} \cdot \frac{OG}{OF} \cdot \frac{PE}{PG} = 1 \tag{4}$$

În doi timpi și trei priviri se observă că $\frac{MF}{ME} = \frac{IC}{CD}$ deoarece $FE \parallel DI$ și $M \in (FE)$. Mai puțin rapid se ajunge la relația $\frac{OG}{OF} = \frac{DT_3}{AI}$ căci pentru aceasta trebuie să revedem relațiile (1) și (2) unde $OQ$ și $ON$ corespund lui $OG$ și $OF$ din (4). Într-adevăr, $\frac{OG}{OF} = \frac{p - AI}{AI} =$ $= \frac{DT_3}{AI}$ (unde $p$ este semiperimetrul triunghiului $ADI$, iar $DT_3 = p - AI$ ca segment determinat pe o latură a triunghiului de către punctul de contact cu cercul înscris). Cu aceste ultime două relații, (4) devine

$$\frac{IC}{CD} \cdot \frac{DT_3}{AI} \cdot \frac{AB}{BT_1} = 1 \tag{5}$$

unde am ținut de asemenea cont de relația prea ușor găsibilă $\frac{PE}{PG} = \frac{AB}{BT_1}$ ($PE \parallel AB$) $G \in (PE)$. Și tot Menelaos este acela care aplicat triunghiului $BDI$ cu transversala $AC$ ne conduce la

$$\frac{IC}{CD} \cdot \frac{ND}{NB} \cdot \frac{AB}{AI} = \frac{IC}{CD} \cdot \frac{DT_3}{BT_1} \cdot \frac{AB}{AI} = 1, \tag{6}$$

unde s-a ținut seamă de o „învățătură" de la stabilirea punctului lui Newton (notat cu $N$ pe figura 58).

De aici se scoate $\frac{IC}{CD}$, care se înlocuieşte în (5). Se obţine în fine (era şi timpul)

$$(7) \qquad \frac{IC}{CD} \cdot \frac{DT_3}{AI} \cdot \frac{AB}{BT_1} = \frac{AI}{AB} \cdot \frac{BT_1}{DT_3} \cdot \frac{DT_3}{AI} \cdot \frac{AB}{BT_1} = 1$$

ceea ce revine la... 1 = 1.

Cum de ultima egalitate (1 = 1) nu văd cine s-ar îndoi, nici eu nu mă îndoiesc de transversala *MOP*, deci de adevărul teoremei lui Newton relativ la care „mai am un singur dor" : vreun cititor să-mi arate, dacă-i în măsură, cum şi-a demonstrat Newton însuşi teorema.

## 36. CUVÎNT APARTE DESPRE TEOREMA LUI MENELAOS

Am spus într-o paranteză a problemei precedente că aş ridica această teoremă la rang pitagoreic. Reamintirea acelei „exclamaţii" este poate cea mai nimerită introducere pentru acest cuvînt aparte pe care-l merită celebra teoremă a matematicianului antic Menelaos.

Menelaos ! Cînd am auzit prima oară de el am crezut că este una şi aceeaşi persoană cu regele, cel cu frumoasa (Elenă) răpită. Ce eroare ! Acela avea cu totul alte îndeletniciri... Tizul său — preferatul meu printre „teoremicieni" în acest moment — a dat, prin teorema ce-i poartă numele, o „lovitură" cu răsunet peste veacuri. Aş compara această „lovitură" cu aceea dată, pe plan muzical, de către Ketelbey cu divina sa „Piaţa persană". Căci aşa cum despre ultimul n-am auzit să mai aibă creaţii notabile, nici în ce-l priveşte pe Menelaos nu am auzit de isprăvi de notorietatea celei în speţă. Mai concret, nu am auzit de alte contribuţii ale lui la matematică. Dar, vă spun sincer, cea pe care o cunosc îmi ajunge cu prisosinţă. Am folosit-o de atîtea ori în „răfuielile" mele de rezolvitor (numai în această lucrare de vreo 7—8 ori ca să nu mai vorbesc de zecile de probleme care nu au putut pătrunde în această carte neavînd un cadru de rezolvare „peripăţanic") încît mai-mai să-l uit pe Pitagora (noroc că acesta mai are şi o teoremă generalizată).

Cîteva particularităţi ale teoremei lui Menelaos se cer cu insistenţă — într-un „cuvînt aparte" — a fi subliniate :

— Este o teoremă care cere foarte puţin pentru a fi dedusă ; înaintea ei, ca teoremă „primară" se situează doar teorema lui Tales. „Menelaos" decurge, printr-o demonstraţie simplă şi ele-

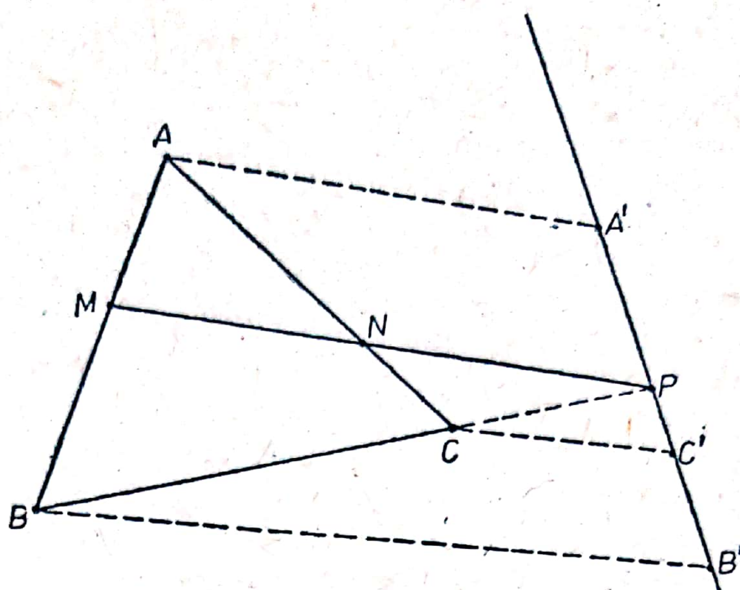



Fig. 59

gantă, din segmentele proporţionale determinate pe drepte oarecare de un fascicul de drepte paralele (consecinţă a lui „Tales") ; prin urmare teorema lui Menelaos este o consecinţă a teoremei lui Tales şi nu a teoremei asemănării cum s-a afirmat „undeva, cîndva" într-o revistă de specialitate. Iată în continuare la acest punct demonstraţia* menită a-mi susţine afirmaţia de mai sus. Fie triunghiul $ABC$ şi transversala $MP$ care intersectează laturile triunghiului în $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ şi $P \in (BC)$, în figura 59 ; fie de asemenea o dreaptă în totul oarecare, cu excepţia faptului că trece prin $P$. Se construiesc prin $A$, $B$, $C$ paralele la $MP$, care intersectează dreapta oarecare ce trece prin $P$ în $A'$, $B'$, $C'$ respectiv. Cu o uşurinţă încîntătoare se văd proporţiile :

$$\frac{MA}{MB}=\frac{PA'}{PB'}; \quad \frac{NC}{NA}=\frac{PC'}{PA'}; \quad \frac{PB}{PC}=\frac{PB'}{PC'}$$

relaţii care înmulţite membru cu membru duc, instantaneu, la $MA/MB \cdot NC/NA \cdot PB/PC = 1$, c.t.d. Deci nimic din această demonstraţie nu... aduce cu teorema asemănării. Că „Menelaos" se demonstrează şi prin „asemănare", este adevărat, dar este o demonstraţie la mîna a doua căci cine nu ştie că şi „asemănarea" se deduce tot din Tales ?

— Teorema lui Menelaos stă ea însăşi la baza demonstraţiei altor teoreme, ca de pildă teorema lui Ceva sau a lui Newton (cu care tocmai am încheiat „răfuielile").

— După cum s-a văzut şi în „Newton îmi face greutăţi...", teorema lui Menelaos constituie o excelentă bază pentru demonstra-

* Această demonstraţie are un autor necunoscut de autor (n.a.).

rea unei coliniarități; poate cel mai drăguț exemplu în acest sens îl oferă demonstrarea coliniarității mijloacelor diagonalelor patrulaterului complet, demonstrație pe care — nu mă pot înfrîna! — o redau mai jos întocmai cum apare ea ca soluție la problema nr. 1 109 din culegerea amintită a lui Gh. Țițeica. Fie patrulaterul complet $ABCDEF$ (fig. 60) cu $L$, $M$, $N$ mijloacele diagonalelor $AC$, $BD$, $EF$ respectiv și $G$, $H$, $K$ mijloacele lui $BE$, $EC$, $CB$. Trebuie să arătăm (folosim și de data asta notațiile din culegerea respectivă) că $(MG : MK) \cdot (LK : LH) \cdot (NH : NG) = 1$. Se observă că segmentele care intră în această relație sînt jumătățile segmentelor determinate de transversala $ADF$ pe laturile triunghiului $BCE$...

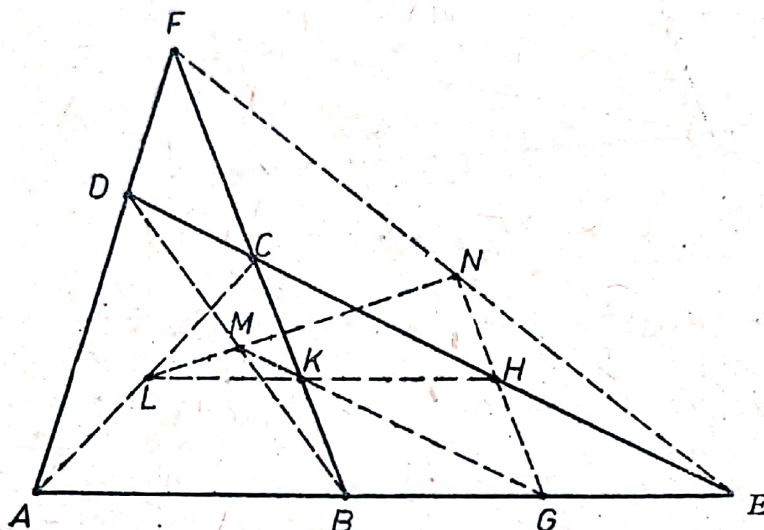



Fig. 60

— Fiindcă veni vorba despre patrulaterul complet, să observăm că acesta parcă a fost „făcut“ anume pentru teorema lui Menelaos sau, invers, teorema respectivă a fost făcută special pentru patrulaterul complet; prin ea se demonstrează adevărul geometric (vezi problema 19) că două diagonale ale patrulaterului complet determină pe cea de-a treia, împreună cu extremitățile acesteia o diviziune armonică.

Desigur, s-ar putea vorbi în continuare de virtuțile acestei teoreme. Se apropie însă sfîrșitul cărții și de aceea mă mărginesc să subliniez adevărul desprins din particularitatea a 3-a, că pînă și dreapta Newton-Gauss (formată de mijloacele diagonalelor patrulaterului complet) rezultă în modul cel mai simplu (căci există și alte demonstrații) tot din faimoasa (și „colțoasa“) teoremă a lui Menelaos.

## 37. GHICI CU CE ZI VA ÎNCEPE ANUL 1 000 001 SAU „DIN CURIOZITĂȚILE CALENDARULUI GREGORIAN"

An de an am tot citit succinta prezentare a calendarului gregorian, aflată în „incinta" agendelor de 2 lei, dar niciodată nu m-am străduit să înțeleg bine de ce Cezar a introdus anii bisecți, de ce Papa i-a redus (după ce adăugase cele 11 zile), de ce trebuie să existe indivizi care-și sărbătoresc ziua de naștere odată la 4 ani etc. Îmi era ciudă pe mine însumi că nu-mi clarificasem modul în care omul a contabilizat timpul — singura contabilitate care nu-mi face oroare... Și cine știe dacă această stare nu ar fi persistat pînă la următoarea explozie Big-Bang de n-ar fi existat pe lume „Magazinul" și mai cu seamă numărul său din 5 aprilie 1986.

În pagina 11 a acestui număr, la rubrica „Verificați-vă cunoștințele", se poate citi printre altele :

„Astronomii și matematicienii au observat și calculat că nici un secol nu a început sau nu va începe în zilele de vineri sau duminică, în conformitate cu actualul calendar".

Afirmația aceasta a constituit picătura care a făcut să se... urnească paharul. Părîndu-mi-se de-a dreptul nedrept ca doar vinerea și duminica să n-aibă onoarea de a deschide din cînd în cînd cîte un secol, m-a cuprins o irezistibilă curiozitate de a verifica cele scrise în revistă. Dar pentru rezolvarea problemei ce se ivise, pe neașteptate, o condiție maxi-necesară era să-mi lămuresc toate neînțelegerile depănate mai sus. Ceea ce cu ajutorul cărții lui George Stănilă intitulată *Sisteme calendaristice* am reușit să irealizez în bună măsură. În cele ce urmează nu voi face o trecere în revistă a sistemelor calendaristice căci „nu avem nici timp nici loc". Este mini-suficient să reamintesc doar cum este „administrat" timpul cu ajutorul celui mai răspîndit calendar, cel gregorian. Chintesența acestuia se poate exprima în numai trei puncte :

1) Primul an gregorian a fost anul 1582 care însă a început cu... ultimele sale cinci șesimi dintr-un sfert, adică la 15 octombrie;

2) Anul gregorian poate fi „simplu", adică să aibă doar 365 de zile calendaristice, dar numai atunci cînd nu se divide prin 4 sau face parte din anii seculari (cei care încheie secolele) care nu se divid prin 400. Astfel de ani sînt, de pildă, 1981, 1982, 1983, etc., dar și 1700, 1800, 1900, 2100 etc.

3) „Gregorianul" poate fi și „compus", adică să aibă 365 + 1 zile (1 reprezentînd celebra zi de 29 februarie), ceea ce se întîmplă cînd se divide cu 4 sau face parte din anii seculari divizibili cu 400. Exemple : 1980, 1984, 1988 etc., dar și cei ca 1600, 2000, 2400 etc. Deci într-un secol sînt fie 24 fie 25 ani bisecți.

Despre calendarul definit ca mai sus și care este cel mai izbutit de către om pînă în prezent, s-ar putea spune mult mai mult dar nu ne permite ... calendarul. Totuși, cîteva cuvinte, în încheiere, despre precizia anului gregorian în raport cu cel solar, sînt necesare. Știind că anul solar cuprinde 365,24220 zile solare mijlocii (vezi cartea amintită), se calculează că anul gregorian este mai lung decît acesta cu 0,000305 zile solare. Aceasta înseamnă o diferență de 1 zi la 3 280 de ani, adică o precizie de circa 10 ori mai mare decît cea a calendarului iulian. Atît ar fi de spus despre precizie, nu pentru rezolvarea problemei, ci pentru cultura noastră generală. Și-acum

Problema despre calendar
S-o abordăm prin analiză
Căci simt că ne aduce-n dar
O veritabilă surpriză...

Fie o analiză în numai 8 puncte... :

1) Deoarece calendarul gregorian a început în ziua de vineri 15 octombrie 1582, pînă la sfîrșitul acelui an au mai fost

$$16 + 30 + 31 = 77 \text{ zile}$$

2) Se evaluează suma zilelor scurse de la aceeași dată istorică pînă la sfîrșitul secolului respectiv ținînd seama că în acest interval de timp au fost 5 ani bisecți (inclusiv anul 1600) :

$$5 \times 366 + 13 \times 365 + 77 = 6\,652 \text{ zile.}$$

Acest număr de zile (aproximativ egal cu numărul stelelor vizibile cu ochiul liber în emisfera nordică sau cu numărul străzilor Bucureștiului) începe cu 16 octombrie 1582, deci sîmbătă ;

3) Se observă că $6\,652 = 950 \times 7 + 2$, ceea ce altfel spus înseamnă 950 de săptămîni „sîmbătă-vineri" și încă două zile, sîmbătă și duminică, ultimele zile ale anului 1600. Am picat deci pe o concluzie picantă : primul secol al primei serii de patru secole din calendarul gregorian (serie care începe totdeauna după un an secular divizibil cu patru sute) a început lunea. Nici că se putea ceva mai comod pentru raționamentul ce urmează !

4) Dînd peste acest adevăr am fost parcă străpuns de o bănuială : că și următorul set de patru secole (care va începe cu 2001) va debuta tot cu o zi de luni. Să vedem aritmetic dacă am fost străpuns cu folos... Un set de 400 de ani definit ca mai sus (de pildă 2001—2400) cuprinde :

$$400 \times 365 + 97 = 146\,097 \text{ zile}$$

unde s-au scăzut dintre bisecți anii seculari nedivizibili cu 400 și care sînt în număr de trei (deci $100 - 3 = 97$, 100 provenind din adunarea anilor bisecți din cele 4 secole, fiecare secol avînd 25 de ani divizibili cu 4). Se observă că acest număr este divizibil cu 7. Uraaaa ! Bănuială confirmată ! Asta simplifică enorm problema,

știind acum sigur că această zi de luni se va regăsi veșnic la fiecare început de „cvadrisecol". Deci din acest moment va trebui doar să vedem cum au debutat secolele din interiorul setului, adică 1701—1800, 1801—1900 și 1901—2000. „Soarta" lor va fi împărtășită, evident, de către omoloagele respective ale tuturor „cvadrisecolelor" ce vor urma ;

5) În secolul 17, adică 1601—1700, care a început luni, sînt

$$100 \times 365 + 24 = 36\,524 \text{ zile,}$$

unde din cei 25 de ani divizibili cu 4 l-am exclus pe 1700 (conform „premizelor gregoriene"). Restul împărțirii la 7 a acestui număr este 5 și cum ultima zi a săptămînilor întregi este duminică, cifra 5 semnifică zilele luni-vineri. Deci ultima zi a secolului 17 a fost vineri, ceea ce înseamnă că prima zi a secolului 18 a fost *sîmbătă* :

6) Secolul 18 care a început sîmbătă are același număr de zile ca precedentul, numai că acum ultima zi a săptămînilor întregi va fi vineri, astfel că restul de 5 zile au fost grupul sîmbătă-miercuri. Deci ultima zi a secolului 18 a fost miercuri ceea ce înseamnă că secolul 19 s-a născut într-o zi de *joi* (s-ar părea că am sărit peste vineri, deja) ;

7) Același număr de zile găsindu-se și în secolul 19 (care a debutat joi), prin același procedeu ca la (5) și (6) se arată că ultima sa zi a fost luni și deci secolul 20 a văzut lumina zilei într-o zi de *marți* ;

8) Se poate continua la fel pentru secolul 20 și verifica — lucrul fiind deja stabilit la (3) — că secolul 21 va începe *luni*.

Am terminat astfel identificarea tuturor începuturilor de secol și într-adevăr n-am găsit printre ele zilele de vineri și duminică. S-a verificat deci afirmația „Magazinului". Dar iată surpriza promisă: nu se găsește printre „debuturile seculare" nici ziua de miercuri ! Nu știu dacă această omisiune din revistă este greșeală de autor sau de tipar dar știu că eu vreau s-o repar strigînd atît de „tare" încît să se audă „peste veacuri" : nici un secol nu a debutat sau nu va debuta în zilele de miercuri, vineri și duminică, în conformitate cu calendarul actual !

Și-acum ghici cu ce zi va începe anul 1 000 001 ?

Ce simplă pare acum această întrebare și ce... iresponsabilă ar fi putut să pară acolo în „titlul" problemei ! În numai a... 31622400-a parte dintr-un an bisect, ne-am dat seama că „milionarul" an va debuta (presupunînd că nu ar fi necesare corecții în genul celei din 1582) așa cum a debutat 1601 sau cum vor debuta anii 2001, 2401, 2801, etc., adică într-o zi de luni. Vom trăi și vom vedea!

PUNCT !

# *CUVÎNT „DUPĂ"*

*Acest „cuvînt-după" este de fapt o „speranță-înainte". Dar ce vrea să spere autorul acum în final ?*

*1) Că problemele „atacate" au dovedit, măcar o parte dintre ele, valoare de model.*

*2) Că modul în care au fost tratate — evocînd condițiile mai mult sau mai puțin amuzante în care și-au dezvăluit soluția — le-a făcut mai ușor de înțeles, mai plăcut de urmărit și mai pline de învățăminte.*

*3) Că acum după ce a parcurs în fugă — ca pentru prima dată — aceste rezolvări cu peripeții, cititorul va relua „lectura" și se va ocupa de problemele pe care le-am propus.*

*4) Că problemele propuse sînt încă mai interesante decît cele din care au decurs (ar putea chiar constitui conținutul unei noi cărți similare).*

*5) Că s-a ilustrat ideea expusă în „Cuvînt neapărat înainte", a asemănării procesului de rezolvare a unei probleme cu un — nu totdeauna mic — proces de cercetare.*

*Dar cîte nu se pot spera în legătură cu o carte !*

## *EPILOG*

*Ca să-l prind pe „Albatros",*
*Conștient ce greu e pasul,*
*L-am încercuit zelos*
*Cercînd marea cu... compasul.*

## ANEXA I

### DIN PROBLEMELE PROPUSE PENTRU G.M.F. DE CĂTRE CRISTEA ION

1044. Să se rezolve grafic sistemul

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a} \quad \text{și} \quad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{b^2}$$

unde $a$ și $b$ sînt segmente date.

1 426. Să se arate că

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-d)(c-a)(c-b)}+$$
$$+\frac{d^2}{(d-a)(d-b)(d-c)}=1$$

unde $a$, $b$, $c$, $d$ sînt numere diferite între ele.

1 606. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{x-a}{x+a}+\frac{x-b}{x+b}+\frac{x-c}{x+c}=3$$

și să se arate că oricare ar fi $a$, $b$, $c$, reale și rădăcinile sînt tot reale.

1 713. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$xy(x+y-2z)=c$$
$$yz(y+z-2x)=a$$
$$zx(z+x-2y)=b$$

1 757. Se consideră un tetraedru $ABCD$ și un punct $I$ pe sfera circumscrisă lui.
Dacă dreptele $IA$, $IB$, $IC$, $ID$ înțeapă un plan oarecare în patru puncte $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ conciclice, atunci dreptele $IA$, $IB$, $IC$, $ID$ înțeapă orice alt plan tot în patru puncte conciclice.

1 795. Fie $A$ un punct pe semicercul de diametru $BC$. Un cerc cu centrul în $A$ și tangent dreptei $BC$ taie arcele $AC$ și $AB$ în $B_1$ și $C_1$. Să se stabilească relațiile:

$$BC \cdot B_1C_1 = AB(CC_1 + B_1C) = AC(BB_1 + BC_1)$$

1 825. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$(xy)^{\log z} + (xz)^{\log y} = a$$
$$(yz)^{\log x} + (yx)^{\log z} = b$$
$$(zx)^{\log y} + (zy)^{\log x} = c$$

1 898. Să se calculeze suma:

$$S_n = \frac{a^0 + b^0}{(a+b)^0} + \frac{a^1 + b^1}{(a+b)^1} + \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2} + \ldots + \frac{a^n + b^n}{(a+b)^n}$$

2 141. Să se afle bazele $x$, $y$, $z$ ale sistemelor de numerație în care există relația

$$1954_x + 1955_y + 1956_z = 1978_{20}$$

știind că $x + y + z = 39$.

2 228. Dacă

$$E_1 = \frac{(1 + \sqrt{1 + x^m})^n + (1 - \sqrt{1 + x^n})^m}{(1 - \sqrt{1 - x^m})^n + (1 - \sqrt{1 - x^n})^m}$$

$$E_2 = \frac{(1 + \sqrt{1 - x^m})^n - (1 - \sqrt{1 - x^n})^m}{(1 - \sqrt{1 - x^m})^n - (1 - \sqrt{1 - x^n})^m}$$

să se arate că $E_1 + E_2 = 0$.

2 841. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\frac{a}{x + a} + \frac{y}{x + y} = \frac{a + y}{x + a + y}$$

$$\frac{b}{y + b} + \frac{x}{y + x} = \frac{b + x}{y + b + x}$$

2 902. Dacă $U_0, U_1, U_2, \ldots$ sînt termenii consecutivi ai șirului lui Fibonacci, să se demonstreze că există relațiile:

$$\frac{U_1}{U_0U_2} + \frac{U_2}{U_1U_3} + \ldots + \frac{U_n}{U_{n-1}U_{n+1}} = 2 - \frac{U_{n+2}}{U_nU_{n+1}}$$

$$\frac{1}{U_0U_2} + \frac{1}{U_1U_6} + \ldots + \frac{1}{U_{n-1}U_{n+1}} = 1 - \frac{1}{U_nU_{n+1}}$$

## ANEXA II

# (RE) CULEGERE DE PROBLEME

## CUM SE PUNE PROBLEMA

Acum că v-ați... recules după ce v-am „îndurerat" cu rezolvările mele, vă dau prilejul să vă înveseliți cu propriile D-voastră rezolvări În acest scop m-am decis să abordez și să „brodez" o adevărată culegere, adică întocmită după toate canoanele clasice : enunțurile problemelor de o parte, „denunțurile" soluțiilor de alta.

Mărturisesc din start că voi încerca să fac această a doua culegere, adică re-culegere, cît mai generatoare de „răfuieli" pentru cititorul-rezolvitor, deși știu că nu voi reuși în măsura dorită. De asemenea mărturisesc că nu voi renunța la „tonul" cu care am „executat" atît enunțările, cît și rezolvările în culegerea de „soluționări cu probleme" ...

Tot din start vreau să-mi exprim speranța că „prin prezenta" va fi pusă la lucru mai mult imaginația decît atenția cititorului, adică invers decît s-a întîmplat — iarăși sper — la „culegerea de peripeții" de care abia a scăpat (vor exista și aici soluțiile autorului dar nu vor fi „obligatorii").

Cele mai multe dintre... puținele probleme ale re-culegerii sînt fie formulate fie reformulate de către autor. Pentru că la acestea din urmă au fost „reformulate" și soluțiile, va rămîne pentru cititor un „mister" numele celui a cărui problemă a fost „mistificată" (mister nu tocmai de nepătruns...)

Ca artilerie grea am ales cîteva probleme, (ale căror soluții mi-am permis uneori să le dezvolt un pic), din unele cărți a căror epuizare ar fi putut să se facă concomitent cu epuizarea fizică a vînzătorilor... Autorii lor vor fi menționați cu toată considerația.

Înainte de a se năpusti spre a „pustii" problemele pe care i le propun (și i le... opun), îl rog pe cititor să nu treacă peste soluțiile autorului, care, uneori, poate, îl vor destinde cu un „zîmbet fizico-matematic"...

Cu urări alese de succese dense !

AUTORUL

## A) PROBLEME A CĂROR NATURĂ NU ARE NICI O INFLUENŢĂ ASUPRA ORDINII ÎN CARE SÎNT PROPUSE

1) Să se rezolve ecuaţia

$$4^x + 6^x = 9^x$$

în care $x$ o fi el necunoscut dar este exponent...

(Autor necunoscut de către... autor)

2) Ştiind că $\frac{\sin(x+z)}{\sin(y-z)} = m$ şi $\frac{\cos(y+z)}{\cos(x-z)} = n$

să se arate că există $\frac{\cos(x-y)}{\cos 2z} = \frac{m+n}{mn+1}$

(Admitere în Institutul Politehnic, 1955)

3) Printr-o paralelă la una din laturi, să se împartă un triunghi în două părţi echivalente folosind doar de trei ori rigla. În rest, ori de cîte ori va fi nevoie, compasul şi numai el.

(Personală)

4) Presupunînd că se dau perimetrul, raza cercului circumscris şi „înălţimea totală", să se calculeze suma pătratelor laturilor triunghiului.

(Personală)

5) Care sînt $x$-urile întregi care fac din suma $ab+x^2$ un pătrat perfect dacă $a$ şi $b$ sînt numere prime absolute mai mari decît doi.

(Autor necunoscut de către... autor)

6) Să se arate că putem avea încredere în relaţia

$$(333\ldots 3)^2 + (444\ldots 4)^2 = (555\ldots 5)^2$$

chiar şi după ce între cifrele (cîte $n$ la număr) din paranteze se ivesc plusuri

(Reformulată)

7) Fie pe un cerc două perechi de puncte diametral opuse Să se găsească cel de-al doilea punct pentru care sumele pătratelor

distanțelor la perechile de puncte date sînt egale. Să se generalizeze la maximum.

(Reformulată)

8) Cosinusul unghiului dintre doi vectori rezultă din alte șase cosinusuri sub acțiunea a trei produse și tot atîtea sume. Care?

*Indicație*: se consideră sistemul de „carteziene" potrivit la locul potrivit...

(Autorul dat uitării de către... autor)

9) În amintirea „celebrei" probleme 13 din *Peripeții*, problemă care a deschis o serie de „exclusivisme" ale compasului, vi se cere ca înarmîndu-vă cu un... compas să extrageți rădăcina lui... 13. Adică, dîndu-se axa numerelor reale cu originea și unitatea respectivă, să determinați, folosind numai compasul, locul lui $\sqrt{13}$ pe această axă.

(Personală)

10) Să se rezolve în numere raționale pozitive ecuația

$$x^y = y^x$$

(Problema V. 59 din „Probleme de aritmetică și teoria numerelor", I. Cucurezeanu, 1976)

11) Să se demonstreze „adevărata" teoremă a bisectoarei, în ipoteza că am uitàt teorema lui Stewart și că nu ne plac construcțiile ajutătoare.

(Personală)

12) Dispuneți de ún manovacuummetru (instrument cu care se poate măsura fie presiunea fie vidul dintr-o incintă), de un tub de gaz sub presiune (gaz cu care intenționați să umpleți, la o anumită presiune, o incintă), de furtun de vid (tub din cauciuc cu pereți groși rezistenți la presiunea exterioară) la discreție, de două T-uri metalice sau din sticlă cu dimensiuni de circa 5—6 cm, pe ale căror capete să se poată fixa etanș tuburile de cauciuc, precum și de o pompă de vid. Vi se cere să imaginați un montaj cu toate piesele de mai sus care să realizeze umplerea incintei cu gazul din tub la o anumită presiune.

(Personală)

13) Să se arate că orice patrulater, inclusiv cel absolut oarecare, poate fi transformat într-unul inscriptibil, cu condiția ca „zeița geometriei" să-l înzestreze cu... articulații la vîrfuri (e vorba de patrulaterul convex).

(Personală)

14) Şi dacă tot am reluat cercetările asupra patrulaterului fără „patrularităţi" deosebite (adică cel oarecare), ce-ar fi să-i calculăm aria în funcţie de laturi şi de unghiurile potrivite ?

(Cercul de Matematică al liceului din Calafat — 1955)

15) Iar pentru a încheia cu acest trio de patrulatere, mai fie următoarea problemă pe care nu am întîlnit-o în „maximele şi minimele" lui Ion Ionescu : din infinitatea patrulaterelor convexe cu laturile congruente, cel mai mult „teren" revine inscriptibilului.

(Personală)

16) Fiecare muchie a unui cub este o rezistenţă electrică de 1 ohm. Care este în acest caz rezistenţa totală dintre două vîrfuri diagonal opuse ale cubului ?

(Charles W. Trigg, „Ingeniozitate şi surpriză în matematică", E.E.R., 1975)

17) Exprimarea concentraţiei în moli la sută ($M$ %) este foarte frecventă în fizico-chimie. De aceea v-aş propune problema următoare. Aveţi două substanţe ionice care diferă doar prin ionul de bază (de pildă CuCl şi NaCl). $G_i$ grame din prima (considerată drept impuritate, de unde şi indicele $i$) se amestecă (perfect) cu $G_s$ grame din cea de-a doua (considerată drept substanţă de bază). Cunoscînd greutatea moleculară a impurităţii, $M_i$, şi pe cea a substanţei de bază $M_s$, să se stabilească o formulă care dă, în $M$ %, concentraţia cationului impurificator în raport cu cationul substanţei de bază.

(Personală)

18) Să se demonstreze că există o infinitate de numere prime.

(Euclid, ELEMENTELE, cartea IX, Propoziţia 20)

19) Trei muchii ale unui pătrat de tablă omogen sînt menţinute la temperatura de 0°, iar a treia muchie este încălzită la 100°. Neglijind pierderile superficiale de căldură, să se găsească temperatura din centrul pătratului de tablă.

(Charles W. Trigg, idem problema 16)

20) Să se calculeze

$$\cos 5° + \cos 77° + \cos 149° + \cos 221° + \cos 293°$$

(Charles W. Trigg, idem problema 16)

21) Rezistenţa electrică echivalentă cu două rezistenţe $x$ şi $y$ legate în paralel este dată de relaţia

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad x, y, z > 0$$

Să se determine soluţiile întregi şi pozitive ale acestei ecuaţii.

(Charles W. Trigg, idem problema 16)

22) Practicați o „secțiune de aur“ în segmentul dat $AB$, folosind în acest scop orice... compas vreți și ori de cîte ori vreți, numai rigla să n-o folosiți decît o singură dată

(Personală)

23) Care este a treia ecuație a sistemului trigonometric

$$\begin{cases} \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma = \frac{1}{8} \\ \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(Reformulată după o problemă dată la o olimpiadă)

24) Un biciclist rulînd rectiliniu și uniform a vrut să facă un viraj și s-o pornească înapoi cam ca o... farfurie zburătoare*. Dar nici vorbă de „zbor“ căci a fost o cădere de toată frumusețea... Cunoscînd coeficientul de frecare între roată și sol ($\mu$), înălțimea centrului de greutate al sistemului om-bicicletă ($h$), viteza mișcării „recti-uniforme“ ($v$) precum și banala accelerație a gravitației ($g$), să se afle raza nefastului viraj ($r_v$).

(Mitroaica Antonin-Bogdan)

25) Cu ceasul cel mare uitat neîntors de către servitor și cu cel mic dat la reparat, Kant a plecat la un amic fără a ști ora plecării. La întoarcere și-a pus totuși ceasul la ora exactă fără a întreba în stînga sau în dreapta. Cum a procedat ?

(Problema 15, pagina 57 din *Caleidoscop matematic*, Editura Albatros, 1979, de V. Bobancu)

26) Dintr-un punct se aruncă simultan o mulțime de bile identice, cu aceeași viteză $v_0$, simetric în toate părțile. Care este raza cercului (situat pe suprafața pămîntului) în interiorul căruia cad $f$ procente din numărul total de bile ?

(Problema 1.3.94 din *Probleme de fizică pentru clasele IX—X*, de A. Hristev et al.)

27) Fie o rețea geometrică echivalentă cu o rețea cristalină. Ea arată ca în figura alăturată (61) care redă totodată și modul în care se generează această rețea : prin translația pe trei direcții necoplanare a „paralelipipedului elementar“ $ABCDEFGH$. Punctele „reliefate“ în acestă figură corespund nodurilor din rețeaua cristalină reală (care pot fi atomi, ioni, molecule sau grupuri ale

* „Fericiții“ martori oculari ai unor zboruri de farfurii cosmice (spre deosebire de nefericitele victime ale zborurilor unor farfurii casnice), afirmă că acestea își pot schimba brusc direcția de zbor, sub orice unghi (o.z.n. — observația zețarului neîncrezător).

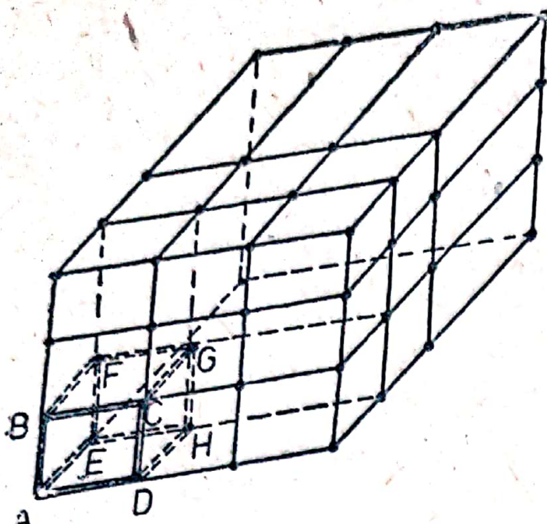



Fig. 61

acestora). Presupunînd că și în „cazul geometric" rotația în jurul unei direcții formate din puncte ale rețelei se face ca în cazul cristalului, adică ducînd la o dispunere a punctelor componente identică cu cea inițială, să se arate ce valori admite unghiul de rotire.

(Reformulată)

28) O bilă de masă $m_1$, suspendată printr-un fir, este menținută în repaus, în poziție deviată cu $\alpha$ a firului față de verticală. De bila $m_1$ este suspendată printr-un alt fir o altă bilă, de masă $m_2$. Să se afle accelerația bilei 2 IMEDIAT ce i se dă drumul bilei $m_1$.

(Problema 1.3.205 din „A. Hristev...)

29) Să se demonstreze că într-un grup de șase persoane există trei persoane care fie că se cunosc reciproc, fie că nu se cunosc deloc între ele.

(Problema 151 din *Ingeniozitate și surpriză în matematică*, 1975, de Charles W. Trigg)

30) Dacă $n$ numere prime formează o progresie aritmetică, atunci rația progresiei se divide prin fiecare număr prim $p < n$.

(M. Cantor)

31) Se dă un plan $E$ și trei puncte $A$, $B$, $C$ necoliniare, situate de aceeași parte a planului $E$; în plus, planul $ABC$ nu e paralel cu planul $E$. Fie $A'$, $B'$, $C'$ trei puncte arbitrare din planul $E$. Punctele $L$, $M$, $N$ sînt respectiv mijloacele segmentelor $AA'$, $BB'$, $CC'$, iar $S$ centrul de greutate al triunghiului $LMN$. Să se găsească locul geometric al lui $S$ cînd $A'$, $B'$ și $C'$ se mișcă independent în planul $E$.

(Ch. W. Trigg, *Ingeniozitate și surpriză în matematică*, 1975, problema 59)

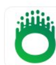
32) Un sac cu făină alunecă liber, fără viteză inițială, de la o înălțime $h = 2{,}0$ m pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 45°$. După coborîre, sacul continuă mișcarea pe un plan orizontal. Coeficientul de frecare este peste tot $\mu = 0{,}50$. La ce distanță de baza planului înclinat se va opri sacul ?

(Problema I.5.74 din „A. Hristev, ...")

38) Luaţi o duzină de puncte pe care le introduceţi în „memoria" compasului. Acesta, după un „program" isteţ pe care i-l faceţi, le dispune astfel încît să vă permită, fără vreo altă construcţie, obţinerea relaţiei :

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}.$$

(Personală)



## B) REZOLVĂRI (FĂRĂ PROBLEME...) ALE PROBLEMELOR DE MAI SUS

1) Aflarea soluției acestei ecuații în care „întîiași dată pentru prima oară“ în prezenta carte o „necunoscută“ vă privește de sus, nu este decît un fleac de exercițiu servind drept încălzire pentru „întîlnirile“ ulterioare.

Cu iuțeala gîndului se observă că ecuația poate fi transmutată astfel:

$$2^x \cdot 2^x + 2^x \cdot 3^x = 3^x \cdot 3^x$$

Este tocmai ce ne trebuie pentru a înmulți cu $\frac{1}{3^x \cdot 3^x}$ și a descoperi, în ciuda întăririi pozițiilor necunoscutei, calea sigură pentru „luarea puterii“. Această cale pornește de la relația

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x} - 1 = 0$$

care dacă acceptă „travestirea“ $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = y$, devine...

$$x = \lg\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^{\frac{1}{\lg 2/3}}$$

S-a obținut o valoare a necunoscutei care parcă o face mai... necunoscută decît atunci cînd ne privea de sus.

2) Așa după cum ați remarcat ca buni „tigronometri“ ce sînteți, secretul acestei rezolvări constă în felul de a lua startul: se pleacă de la $\frac{m + n}{mn + 1}$ în care $m$ și $n$ se înlocuiesc cu valorile lor trigonometrice. În continuare „demolarea“ parantezelor este obligatorie. Dar nu oricum ! Un bun „cultivator“ trigonometric transformă produsele în sume. Ajunge astfel la

$$\frac{m + n}{mn + 1} = \frac{\sin 2x + \sin 2y}{\sin (x + y + 2z) + \sin (x + y - 2z)}$$

Și cum rostul sumelor în care au fost transformate produsele este ca și ele, la rîndul lor, să fie transformate în alte produse, această ultimă expresie, folosind formule calculabile prin logaritmi, devine exact ce ne convine :

$$\frac{m+n}{mn+1} = \frac{\cos(x-y)}{\cos 2z}$$

Relativ ușor, acest exercițiu de trigonometrie se situează totuși, prin natura lui, în sferele cele mai alese și culese ale trigonometriei. Poate tocmai de aceea a fost ales pentru „admiterea“ unora dintre inginerii generației 1960.

3) Oricît de originală s-ar vrea această problemă, nu se poate lipsi de serviciile celebrei „metode a presupusei rezolvate“. Astfel, punînd condițiile ca aria trapezului (fig. 62) să fie echivalentă cu cea a triunghiului mic (condiția 1) și ca suma celor două arii să fie egală cu aria triunghiului mare (condiția 2), se ajunge relativ ușor la următorul rezultat: paralela căutată intersectează înălțimea corespunzătoare la o distanță de vîrful acesteia egală cu latura pătratului care are ca diagonală chiar respectiva înălțime. Acest rezultat va trebui să fie „construit“ cu instrumentele impuse Iată cum :

Fig. 62

a) În figura 63, prin procedeul de la „Peripeții-13“ se găsesc mijloacele $M$ și $N$ ale laturilor $AB$ și $AC$ (acolo segmentul nu era trasat dar asta nu face decît să reducă acum construcția la jumătate...)

b) Al doilea punct de intersecție al cercurilor cu diametrele

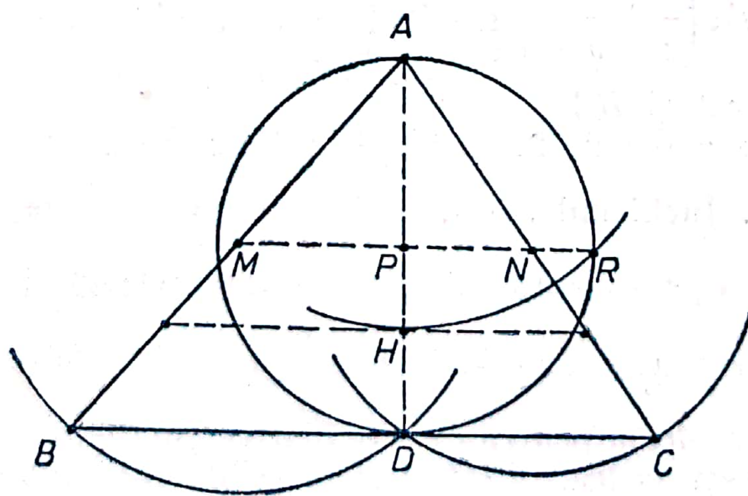


Fig. 63

$AB$, $AC$, notat cu $D$, este piciorul înălțimii din $A$ (vezi „Peripeții-17")

c) PRIMA FOLOSIRE A RIGLEI: se trasează înălțimea $AD$

d) Prin același „13-Peripeții" se află mijlocul lui $AD$, $P$

e) Se descrie unul dintre semicercurile cu diametrul $AD$ (sau amîndouă...)

f) A DOUA FOLOSIRE A RIGLEI: se duce $MN$ pînă intersectează semicercul în $R$

g) Cu centrul în $A$ și raza $AR$ se intersectează $AD$ în $H$ — punctul visat

h) A TREIA FOLOSIRE A RIGLEI. Se duce prin $H$ perpendiculara pe $AD$, care este, în fine, paralela căutată. (Cum se duce o perpendiculară într-un punct pe o dreaptă, numai cu rigla și compasul, nu vă mai spun de teama... echerului pe care nu l-am distribuit în nici un rol).

P.S. Problema se poate rezolva și „clasic", adică fără a folosi „13-Peripeții" și „17-Peripeții",

4) Trag nădejde că puțini sînt cei care nu și-au dat seama din primul moment că „înălțime totală" înseamnă „suma înălțimilor".

Dar să începem cu începutul!

Vom încinge o horă în care vor intra în joc, pe rînd, toate mărimile date. Deci

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc)$$
$$= 4p^2 - 2(ab + ac + bc)$$

Una la mînă: a apărut „$p$"!

Privind cu interes ultima paranteză, îți vine în minte relația de mare densitate: $abc = 4RS$. Și-atunci

$$ab + ac + bc = abc\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 4R\left(\frac{S}{a} + \frac{S}{b} + \frac{S}{c}\right)$$

Două la mînă: s-a infiltrat și $R$!

Ultima paranteză înseamnă de fapt „trei la mînă!" căci este egală cu $\frac{1}{2}(h_a + h_b + h_c)$. Închizînd „hora", își dau mîna toate datele, iar noi punem mîna pe o nouă relație între elementele unui triunghi:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4p^2 - 4R(h_a + h_b + h_c)$$

5) Am ales această problemă pentru că este foarte „amatoare" de discuții, după cum veți vedea. Va trebui să avem neapărat

$$ab + x^2 = m^2 \Leftrightarrow ab = (m - x)(m + x)$$

$a$ și $b$ fiind prime absolute nu putem avea decît:

— cazul I, subcazul 1 : $m - x = ab$ ; $m + x = 1$

— cazul I, subcazul 2 ; $m - x = 1$ ; $m + x = ab$

Din atîtea cazuri și subcazuri, e cazul să ne alegem cu o soluție:

$$x = \pm \frac{1 - ab}{2}$$

— cazul II, subcazul 1 : $m - x = a$ ; $m + x = b$

— cazul II, subcazul 2 : $m - x = b$ ; $m + x = a$

din care rezultă iarăși o soluție și o... subsoluție:

$$x = \pm \frac{b - a}{2}$$

Reuniunea celor două mulțimi de soluții formează mulțimea

$$\frac{1 - ab}{2};\ \frac{ab - 1}{2};\ \frac{b - a}{2};\ \frac{a - b}{2}$$

ale cărei elemente sînt într-adevăr numere întregi ($a$ și $b$ fiind prime absolute, $ab$ este totdeauna impar, $a - b$ totdeauna par...)

6) Dacă avem încredere în această relație, care poate fi oricît de lungă vrem, înseamnă că putem purcede la transformarea ei pentru a ajunge la o relație de care să nu se mai îndoiască nimeni.

Pentru început să remarcăm că nu o alterăm dacă o scriem astfel:

$$3^2(111 \ldots 1)^2 + 4^2(111\ldots1)^2 = 5^2(111 \ldots 1)^2$$

Pentru sfîrșit să simplificăm cu „paranteza" și să menționăm că rezultatul pe care cădem, $3^2 + 4^2 = 5^2$, nu se cade să nu-l credem.

Dacă între cifrele din paranteze apar plusuri, relația care trebuie verificată este:

$$(3 + 3 + \ldots + 3)^2 + (4 + 4 \ldots + 4)^2 = (5 + 5 + \ldots + 5)^2$$

care-și etalează și ea factorii:

$$3^2(1 + 1 + \ldots + 1)^2 + 4^2(1 + 1 + \ldots + 1)^2 = 5^2(1 + 1 + \ldots + 1)^2$$

Prin aceeași simplă simplificare cu „paranteza", se ajunge la același „Pitagora" care este în afară de orice bănuială.

Iată deci două dintre jongleriile care se pot face pornind de la triunghiul de aur (3, 4, 5).

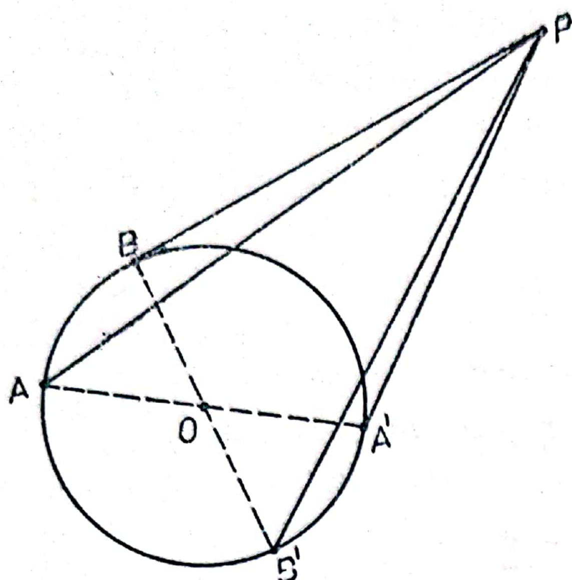



Fig. 64

7) Observați cîtă încredere am în cititor: am fost sigur că și-a dat seama din primul moment care-i primul punct ce satisface condiția problemei.

Pentru a vedea pe cel de-al doilea, fie un punct oarecare, $P$, în planul cercului (interior sau exterior acestuia) din figura 64. Prin teorema medianei, din triunghiurile $PAA'$ și $PBB'$ (în care puteți s-o aplicați simultan dacă... puteți) rezultă rapid

$$PA'^2 + PA^2 = PB'^2 + PB^2,$$

relație care ne umple de uimire. Păi cum să nu! Luăm un punct oarecare și constatăm că este chiar el punctul pe care-l țintește problema ?! Așadar, cel de-al doilea punct care păstrează egale sumele pătratelor distanțelor la perechile de puncte considerate, este... oricare punct din planul cercului...

Generalizarea care se cere este posibilă deoarece — revedeți enunțul! — problema nu specifică unde trebuie să se afle acest punct. Cum planul l-am „terminat", nu ne rămîne decît să ne „săltăm" în spațiu și să constatăm — aceasta fiind de fapt generalizarea — că misteriosul „al 2-lea punct" este... orice punct din univers ?!

8) Ne agățăm de indicație. Fiind vorba de un sistem de coordonate, ne ducem, cuminte, cu mintea la cele 6 unghiuri pe care cei doi vectori le fac cu axele sistemului. Oare nu cosinusurile acestor unghiuri sînt cele vizate? Cum nu avem de ales, s-o pornim fără sfială pe această bănuială. Deci, fie sistemul de axe rectangulare $x$, $y$, $z$ precum și cei doi vectori $\bar{A}$ și $\vec{B}$

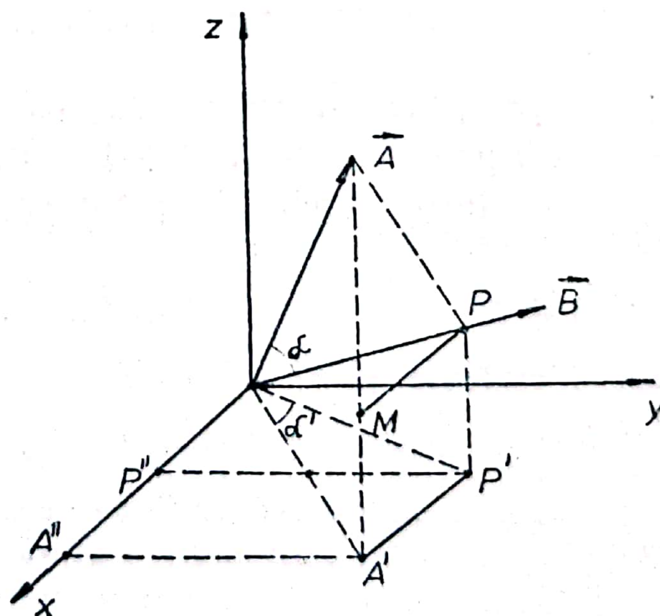



Fig. 65

(fig. 65). Pentru a introduce în joc cosinusurile unghiurilor „suspectate“, construcțiile ajutătoare sînt de rigoare și se succed astfel :

— din vîrful $A$ al vectorului $\vec{A}$ se coboară perpendiculara în $A'$ pe planul $xoy$ și perpendiculara în $P$ pe vectorul $\vec{B}$ ;

— din punctul $P$ se coboară perpendiculara în $P'$ pe planul $xoy$

— ploaia de perpendiculare continuă : din $A'$ și $P'$ se duc perpendicularele în $A''$ respectiv $P''$ pe axa $ox$ ;

— ploaia de perpendiculare a încetat : se duce paralela $PM$ la $P'A'$.

Atîtea „duceri“ aduc o mulțime de triunghiuri sub ochii noștri scrutători. Scrutînd triunghiul dreptunghic $AMP$ ca și $\Delta APO$ de asemenea dreptunghic, rezultă dubla egalitate :

(1) $$AP^2 = A'P'^2 + (AA' - PP')^2 = OA^2 - OP^2$$

Triunghiul oarecare $A'P'O$ ne prilejuiește o reîntîlnire cu teorema cosinusurilor

(2) $$A'P'^2 = OA'^2 + OP'^2 - 2OA' . OP' . \cos \alpha'$$

E rîndul următorului cvartet de relații să se remarce :

(3) $$\begin{aligned} OA' &= OA \sin (\vec{A}, z) \\ AA' &= OA \cos (\vec{A}, z) \\ OP' &= OP \sin (\vec{B}, z) \\ PP' &= OP \cos (\vec{B}, z) \end{aligned}$$

relații din a căror combinare cu (1) și (2) rezultă

(4) $$\begin{aligned} OA^2 - OP^2 &= A'P'^2 + (AA' - PP')^2 = \\ &= OA'^2 + OP'^2 - 2OA' \cdot OP' \cdot \cos \alpha' + (AA' - PP')^2 = \\ &= OA^2 \cdot \sin^2 (\vec{A}, z) + OP^2 \cdot \sin (\vec{B}, z) - 2OA \,.\, OP \cdot \end{aligned}$$

$$\cdot \sin (\vec{A}, z) [\sin (\vec{B}, z) \cdot \cos \alpha' + [OA \cos (\vec{A}, z) - OP \cos (\vec{B}, z)]^2$$

de unde, dacă „pulverizați“ paranteza și apoi împărțiți ambii membri cu $OA^2$, aveți cuvîntul meu că rezultă relația

(5) $$\cos \alpha = \frac{OP}{OA} = \sin (\vec{A}, z) \sin (\vec{B}, z) \cos \alpha' + \cos (\vec{A}, z) \cos (\vec{B}, z)$$

care nu trebuie... crezută pe cuvînt.

După ce s-a convins personal de sinceritatea... relației (5), cititorului nu-i mai rămîne decît să se ocupe de „intrusul“ $\cos \alpha'$. Pentru

aceasta va observa mai întîi că $m(\alpha') = m(\widehat{P'OP''}) - m(\widehat{A'OA''})$, apoi va calcula $\cos \alpha'$ așa:

$$\cos \alpha' = \cos (\widehat{P'OP''}) \cdot \cos (\widehat{A'OA''}) + \sin (\widehat{P'OP''}) \cdot$$

(6)
$$\cdot \sin (\widehat{A'OA''}) = \frac{OP \cos (\vec{B}, x)}{OP \sin (\vec{B}, z)} \cdot \frac{OA \cos (\vec{A}, x)}{OA \cdot \sin (\vec{A}, z)} +$$

$$+ \frac{OP \cos (\vec{B}, y)}{OP \cdot \sin(\vec{B}, z)} \cdot \frac{OA \cos (\vec{A}, y)}{OA \cdot \sin (\vec{A}, z)} =$$

$$= \frac{\cos (\vec{A}, x) \cos (\vec{B}, x) + \cos (\vec{A}, y) \cdot \cos (\vec{B}, y)}{\sin (\vec{A}, z) \sin (\vec{B}, z)}$$

Înlocuind această valoare în (5), va obține o relație doldora de produse și sume, adică tocmai ceea ce căutăm:

(7
$$\cos (\vec{A}, \vec{B}) = \cos (\vec{A}, x) \cos (\vec{B}, x) + \cos (\vec{A}, y) \cos (\vec{B}, y) +$$
$$+ \cos (\vec{A}, z) \cos (\vec{B}, z)$$

9) De ce radical tocmai din cel de-al șaselea număr prim? Problema, se putea pune la fel de bine și pentru precedentele, fără teamă că se propune o bagatelă. Dar 13 este... 13! Mi s-a părut, poate, că a extrage rădăcina pătrată a acestui număr pe bună... nedreptate temut, este o mare contribuție la lupta pentru

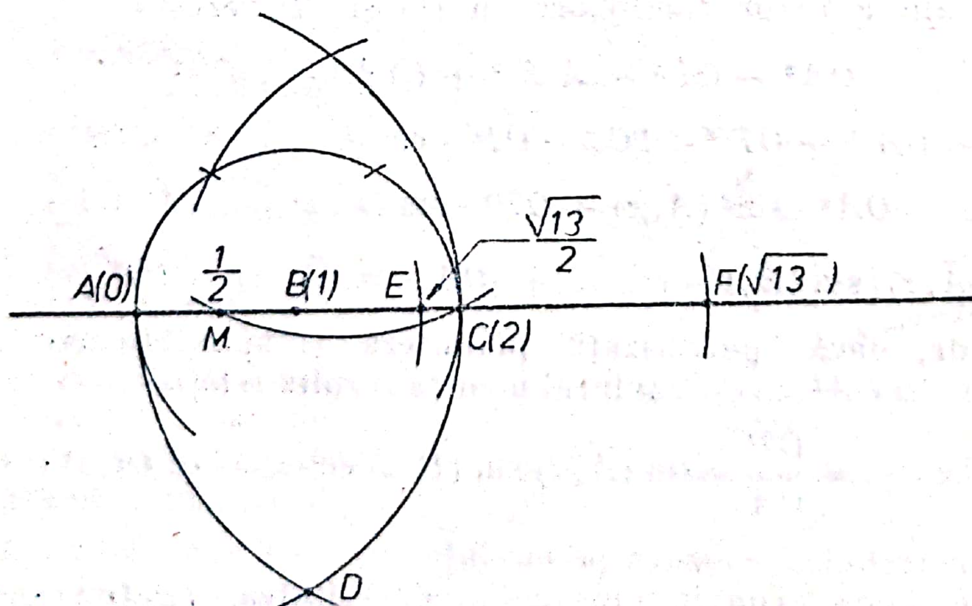



Fig. 66

„reabilitarea" lui (zic „reabilitare" fiind convins că nu totdeauna a fost atît de ocolit).

Trec la rezolvarea pe puncte concise și precise. Dar nu pornind de la $\sqrt{13} = 3{,}6055512...$ Deci, cu ochii la figura 66, descoperiți că :

1) s-au luat originea, notată cu $A$, și punctul $B$ corespunzînd numărului 1 de pe axa reală ;

2) prin procedeul de la „13-Peripeții" se găsește $M$, punctul corespunzînd lui 1/2 de pe axa numerelor reale (operația este mai scurtă decît acolo dat fiind că axa este trasată), după $C$ corespunzînd lui 2.

3) se poate găsi punctul $D$ care cu $A$ și $C$ dă un „echilateral" ;

4) lungimea lui $DM$ este $\sqrt{13}/2$ ;

5) luînd în compas $DM$ și punînd piciorul acestuia în $A$ se secționează axa în $E$ corespunzînd lui $\sqrt{13}/2$

6) îngrozitor de simplu se află $F$ corespunzînd lui $\sqrt{13}$.

P. S. Problema se poate rezolva și fără „13-Peripeții".

10) Iată o ecuație pe care dacă nu ar fi propus-o cel care a propus-o, probabil că aș fi propus-o eu, într-atît de mult agreez această „mică buturugă" ... Dar iată cum îi descoperă autorul rădăcinile.

O soluție evidentă este $y = x$ cu $x$ rațional pozitiv arbitrar. Presupunînd că $y \neq x$ și $y > x$, se inventează numărul rațional pozitiv evident $w = \dfrac{x}{y - x}$. Roadele invenției sînt $y = \left(1 + \dfrac{1}{w}\right) x$ și $x^y = x^{\left(1 + \frac{1}{w}\right)x} = y^x$.

Din ultima egalitate rezultă cu claritate

$$x^{1+\frac{1}{w}} = y = \left(1 + \frac{1}{w}\right) x \Leftrightarrow x^{\frac{1}{w}} = 1 + \frac{1}{w}$$

și deci forma „literară" a rădăcinilor căutate :

$$(1) \qquad x = \left(1 + \frac{1}{w}\right)^{w} ; \; y = \left(1 + \frac{1}{w}\right)^{w+1}$$

Dar $w$ și $x$ sînt de forma $n/m$ respectiv $r/s$ unde $n/m$ și $r/s$ sînt două fracții ireductibile. Din (1) rezultă

$$(2) \qquad \left(\frac{m+n}{n}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{r}{s} \text{ sau } \frac{(m+n)^n}{n^n} = \frac{r^m}{s^m}$$

Urmează un raționament care la prima vedere ar putea să pară cam prea arit(er)metic dar care în fond este un excelent exercițiu pentru neuronii noștri setoși de combinații.

Numerele $m$ și $n$ sînt prime între ele, deci și $m+n$ și $n$ și de asemenea $(m+n)^n$ și $n^n$ sînt prime între ele. Analog, $r$ și $s$ și deci și $r^m$ și $s^m$. Prin urmare, ambii membri ai ultimei egalități din (2) reprezintă fracții ireductibile ceea ce înseamnă că nu riscăm nimic dacă „îndrăznim“ relatiile :

$$(3) \qquad (m+n)^n = r^m \text{ și } n^n = s^m.$$

Detectivului îi stă bine cu deducțiile ! Din (3) rezultă că există numerele naturale $k$ și $l$ astfel încît $m+n = k^m$, $r = k^n$ și $n = l^m$, $s = l^n$. Deci $m + l^m = k^m$, de unde $k \geqslant l+1$. Dacă $m > 1$ am avea $k^m \geqslant (l+1)^m \geqslant l^m + ml^{m-1} + 1 > l^m + m$ și în ultimă instanță $k^m > l^m + m$ ceea ce — privește înapoi fără mînie — este imposibil. Deci $m = 1$, $w = \frac{n}{m} = n$ și soluțiile $x = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $y = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ cu $n$ natural arbitrar. Rezultă că singura soluție în numere naturale este pentru $n = 1 : x = 2$ și $y = 4$. Este rezolvarea acestei probleme un proces de cercetare ?

11) Am dat la problema 1 din *Peripeții* o demonstrație a teoremei clasice a bisectoarei fără a uza (oarecum) de vreo construcție ajutătoare. Această a 11-a problemă din (re)culegere a fost propusă numai pentru a-mi da prilejul de a face o demonstrație în aceleași condiții și pentru „adevărata“ teoremă a bisectoarei (se putea s-o supăr după ce o „redescoperisem“ ?).

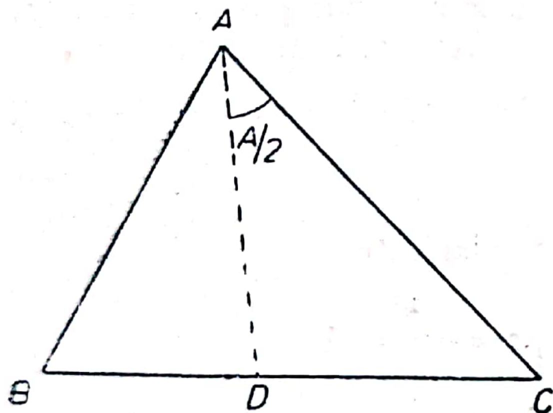


Fig. 67

De data aceasta pornim de la forma trigonometrică a lui „Pitagora — generalizat“ ca să nu-i zicem „teorema cosinusurilor“. Din figura 67 scriem fără vreo explicație :

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} = \frac{AC^2 + AD^2 - DC^2}{2AC \cdot AD}$$

de unde peste cîteva „mutări“

$$AB \cdot AC(AB - AC) = AD^2(AB - AC) + BD^2\, AC - AB \,.\, DC^2$$

În acest moment este nevoie de teorema clasică a bisectoarei (aici este partea slabă a „adevăratei“ : are — ea — nevoie de cea clasică și nu invers). Sub acțiunea ei rezultă

$$BD^2AC - AB \cdot DC^2 = BD \cdot DC(AB - AC)$$

şi problema este rezolv-gata.

12) Această întrebare-problemă a fost imaginată pentru a servi de pe-acum acelora dintre elevii cititori care vor deveni mîine fizicieni experimentatori. Alcătuirea unei instalaţii ca aceea cerută de problemă este o lucrare tipică de laborator de fizică şi poate fi pe cît de interesantă este pe atît de utilă (în studiul absorbţiei luminii prin gaze, de pildă). După cum veţi vedea, ea cere şi puţină gîndire. Dar, să vedem cum raţionăm.

Prima cerinţă care ar putea să ne vină în minte este aceea ca manovacuummetrul să fie astfel dispus în montaj încît să vină în legătură atît cu incinta de încărcat, cît şi cu „rezervorul" de gaz sub presiune. Prin urmare, printr-un tub de cauciuc, manovacuummetrul va fi legat de unul dintre cele trei capete ale unuia dintre T-uri. La celelalte două capete ale T-ului se racordează, fireşte, incinta de interes, respectiv tubul de gaz sub presiune. Acum survine întrebarea : unde şi cum va fi racordată pompa de vid. Răspuns : fie între manovacuummetrul $M$ şi incinta $I$, fie între manovacuummetru şi tubul de gaz sub presiune, $T$. Cum ? Prin intermediul celui de-al doilea $T$, aşa cum prea bine se observă în figura 68, figură-sinteză a considerentelor de mai sus.

Urmează să vedem în continuare dacă montajul astfel schematizat este şi funcţional. Cele două robinete, $R_1$ al pompei de

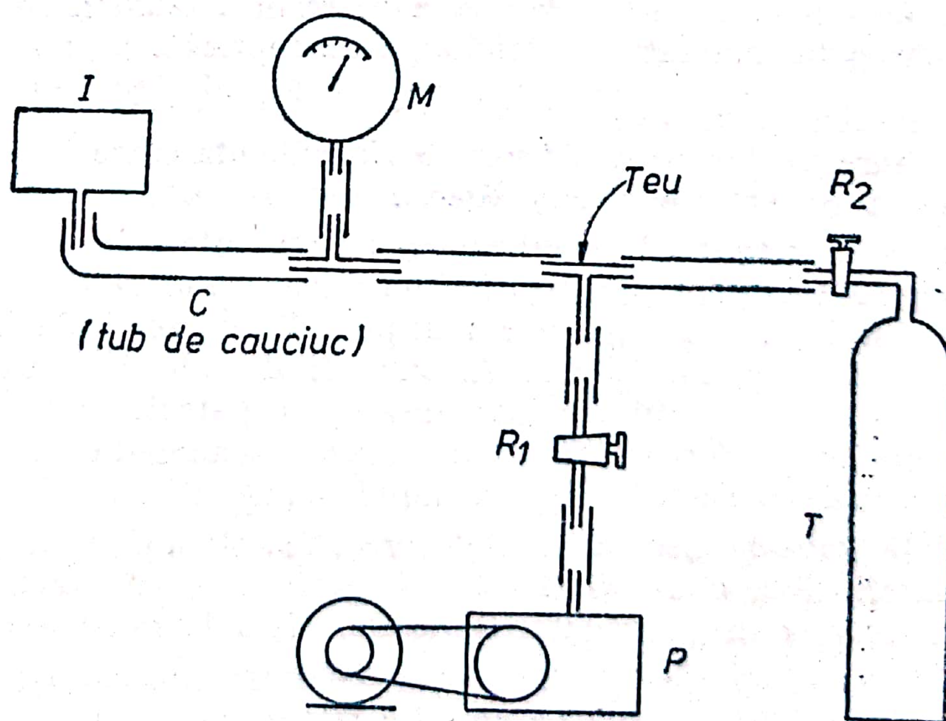



Fig. 68

vid și $R_2$ al tubului de gaz sub presiune, sugerează o funcționare în două reprize. Dar, spre deosebire de fotbal unde soarta meciului poate fi hotărîtă în oricare dintre reprize sau cele două reprize pot fi trase la indigo (adică să fie la fel de proaste...) aici procesele care se petrec în cei doi „timpi" sînt totdeauna perfect opuse iar soarta „golului" din incintă se hotărăște invariabil în repriza doua. Deci :

1) $R_1$ deschis
$R_2$ închis
Pompa $P$ funcționează
Incinta $I$ se videază
Vacuummetrul „consemnează"

Evident, în această repriză se folosește numai partea de vacuum a manovacuummetrului $M$ (care poate fi gradat, de pildă, între $-1$ kgf/cm$^2$ și $+1$ kgf/cm$^2$) ;

2) $R_1$ închis
$R_2$ deschis
Gazul din tub se pornește
Vidul incintei descrește
Iar manometrul „citește"

Am folosit cuvîntul „manometru" deoarece incinta poate fi umplută cu gazul de interes și la presiuni mai mari decît cea atmosferică, deci cînd intră în joc partea de „mano" a manovacuummetrului (pe care presiunea atmosferică este marcată prin „zero"). Și astfel am anulat golul marcat incintei în prima repriză...

13) Pentru a rezolva cît mai acceptabil această problemă, pe care tare aș dori-o considerată ca insolită de către cititor, se cer puse la punct cîteva „înțelegeri".

Una ar fi răspunsul la întrebarea : cum putem lua 4 puncte necoliniare astfel încît să fim siguri că nu formează un „inscriptibil"? Răspuns : se ia mai întîi un cerc apoi pe el 3 puncte și, în fine, al 4-lea alături de circumferință. Ar mai fi de observat că dacă „zeița geometriei" articulează într-adevăr un patrulater, acesta se poate transforma într-un triunghi, adevăr pentru dovedirea căruia nu trebuie să sacrificăm prea multă imaginație.

Odată ajunși la asemenea „înțelegere", ne putem permite a arăta că un inscriptibil, dotat și el cu articulații, se poate transforma datorită lor într-un „patrulater de rînd". Ne-o demonstrează chiar posibilitatea de a-l transforma într-un triunghi la care, evident, cel de-al 4-lea „vîrf" se află pe una din laturi. Și-acum, pe făgașul ales să abordăm cazul de interes.

Sigur că neinscriptibilul provenit din inscriptibil cu articulații poate fi readus la starea inițială după care probabil suspină. Dar dacă acesta este numai un caz particular? ar putea suspina cineva. Pentru a nu mai rezista nici un dubiu, fie un patrulater absolut oarecare, dar articulat, cu ale cărui laturi așezate convenabil „confecționăm" triunghiul $ABD$ (fig. 69), vîrful $C$ aflîndu-se pe latura $BD$. Pe figură e marcat unghiul, evident de 180°, din $C$. Ducînd prelungirea laturii $AB$ avem ocazia să marcăm și unghiul $DAB'$ a cărui măsură e egală cu suma măsurilor unghiurilor $B$ și $D$. Păstrînd fixă latura $AB$, tragem de $C$.

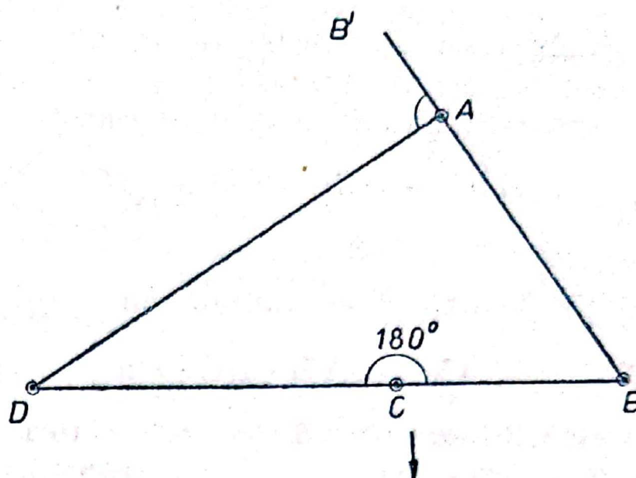



Fig. 69

Să nu-mi spuneți că prin această intervenție unghiul $DAB'$ nu începe a crește, iar $C$ nu începe a scădea, concomitent, luînd valori continue (adică nu în salturi). Pe baza „metodei bunului simț" putem afirma cu toată... simțirea că în decursul deformării atît de efemerului triunghi, inevitabil se ajunge la acea formă de patrulater în care $m(\widehat{DAB'}) = m(C)$. Să mai observăm că inscriptibilului la care am ajuns îi corespund o infinitate de „ne" din care poate proveni ?

14) Deși admit că această rezolvare s-ar putea găsi prin cine știe cît de multe reviste sau cărți, afirm cu mîna pe „patrulaterul concav al inimii" că eu o știu numai de la cercul de matematică al Școlii Medii de 10 ani din Calafat — 1955 — cerc despre care am mai amintit (problema 9 din *Peripeții*). Oricum, după părerea mea, merită să fie reprodusă aici, dat fiind că nici chiar în *Vraja* lui Viorel Gh. Vodă nu i se găsește măcar formula.

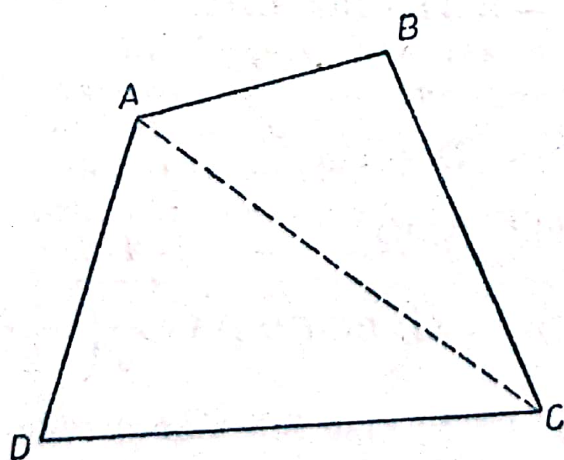



Fig. 70

Exprimînd aceeaşi diagonală, $AC$ de pildă (fig. 70), prin teorema cosinusului aplicată celor două triunghiuri (pe care ea le desparte unindu-le sau le uneşte despărţindu-le), se ajunge la

$$(1) \qquad AB^2 + BC^2 - AD^2 - DC^2 = 2AB \cdot BC \cdot \cos B - 2AD \cdot DC \cdot \cos D$$

relaţie pe care o combinăm cu aproape evidenta

$$(2) \qquad 4S = 2AB \cdot BC \cdot \sin B + 2AD \cdot DC \cdot \sin D$$

Anume, le adunăm după ce le ridicăm la pătrat. Rezultă o relaţie „kilometrică" şi care după transformări inspirate devine la un moment dat

$$(3) \qquad (AB^2 + BC^2 - AD^2 - DC^2)^2 + 16S^2 = 4AB^2 \cdot BC^2 + 4AD^2 \cdot DC^2 - 8AB \cdot BC \cdot AD \cdot DC \left[2\cos^2\left(\frac{B+D}{2}\right) - 1\right]$$

de unde lucrurile merg şnur:

$$16S^2 = (2AB \cdot BC + 2AD \cdot DC)^2 - (AB^2 + BC^2 - AD^2 - DC^2)^2 - 16AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \cos^2\left(\frac{B+D}{2}\right) =$$

$$(4) \qquad = (2AB \cdot BC + AB^2 + BC^2 + 2AD \cdot DC - AD^2 - DC^2) \cdot (2AB \cdot BC - AB^2 - BC^2 + 2AD \cdot DC + AD^2 + DC^2) - 16AB \cdot BC \ldots = [(AB+BC)^2 - (AD-DC)^2][(AD+DC)^1 - (AB-BC)^2] - 16AB \ldots = (AB + BC + AD - CD)(AB + BC - AD + CD) \cdot (AD + CD + AB - BC)(AD + CD - AB + BC) - 16AB \cdot BC \cdot CD \ldots$$

Folosind celebra notaţie

$$2p = AB + BC + CD + DA$$

o relaţie rezultă, iar cititorul exultă (sper):

$$(5) \qquad S = \sqrt{(p-AB)(p-BC)(p-CD)(p-DA) - AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \cos^2\left(\frac{B+D}{2}\right)}$$

O primă observaţie este că tot atît de bine sub umbra radicalului se poate găsi $\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)$ care este egal cu $\cos^2\left(\frac{B+D}{2}\right)$.

Particularizarea cerută de problemă se referă la cazul $B + D = \pi$ adică atunci cînd patrulaterul devine inscriptibil. Se obține formula

$$(6) \qquad S = \sqrt{(p - AB)(p - BC)(p - CD)(p - DA)}$$

pe care cărțile o reproduc fără excepție.

Deci, cum spun francezii, „am realizat două lovituri cu o singură piatră". Ba chiar trei ! Cea de-a treia nu este alta decît rezolvarea problemei care urmează.

15) În ale sale *Maxime și minime geometrice*, Ion Ionescu ne demonstrează (la problema 74) că „dintre toate patrulaterele izoperimetrice inscriptibile într-un cerc, aria maximă o are pătratul". Nicăieri însă, în cartea cu pricina nu am aflat vreo problemă care să se refere la patrulaterele izoperimetrice neinscriptibile. Nici la izoperimetria, în general, nici la izoperimetria caracteristică patrulaterului „cu articulații la vîrfuri" (adică decurgînd din congruența laturilor cuprinse între aceleași vîrfuri).

La acest din urmă caz se referă problema în speță care a devenit „propozabilă" latent cînd s-a rezolvat problema 13 și „propozabilă" vizibil cînd am exultat la apariția relației (5) de la problema precedentă.

Deci știind că un patrulater oarecare poate deveni inscriptibil numai prin schimbarea valorilor unghiurilor sale („descoperirea" de la problema 13) și ținînd seama de relația (5) de la problema 14, putem să-l „completăm" pe Ion Ionescu cu o nouă „găselniță" : dintre toate patrulaterele cu laturile congruente, deci implicit izoperimetrice (și care numără, cum am văzut, o infinitate), aria maximă revine celui inscriptibil.

Într-adevăr, din relația tot-amintită mai sus, se vede că atunci cînd patrulaterul devine inscriptibil, termenul al doilea de sub radical, care se scade, se anulează (c.t.d.). Întrebare : care-i cel cu aria minimă ?

16) Cu privire la această problemă a lui Ch. W. Trigg iată ce, „vă strig" : pică așa cum nu se poate mai bine ! Din două motive : întîi că se simțea nevoia unei probleme care să mai aducă și a fizică, apoi că pentru a o rezolva mai facil autorul admite niște... articulații pe la vîrfurile cubului. Or, o figură geometrică cu articulații la vîrfuri este acum pentru noi un... articol cu care jonglăm. Mai ales în cazul de față unde soluția o luăm absolut de-a gata...

Suspendîndu-l de un vîrf, cubul va începe să „curgă" (fig. 71, b) pînă cînd va ajunge la forma din figură pe care „citim" :

1) Trei muchii legate în paralel care pornesc din vîrful „agățat" și care totalizează rezistența de 1/3 ohmi ;

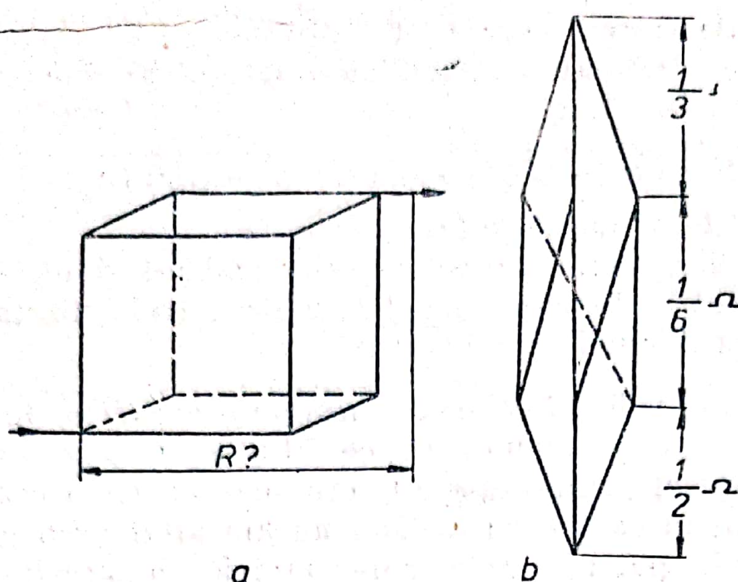



Fig. 71

2) De aceste muchii sînt legate, în serie, alte șase, care între ele se leagă în paralel. Vor totaliza deci 1/6 ohmi;

3) Cele șase muchii legate între ele în paralel, se leagă în serie cu ultimele trei muchii ale cubului, muchii de asemenea „paralele" între ele și care se unesc în vîrful diagonal opus celui „agățat". Evident, și acestea totalizează 1/3 ohmi;

4) $$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6} \text{ ohmi.}$$

17) Un popas în lumea chimiei, fie el chiar numai de o problemă, este pentru mica noastră re-culegere un „colorant" binevenit. Dar să declanșăm „reacția" care ne va duce la soluție. Protagoniștii ei vor fi ionul impurificator de greutate moleculară $M_{i+}$ și cel de bază cu $M_{s+}$. Mai introducem mărimile $G_{i+}$ și $G_{s+}$ care reprezintă greutățile în grame ale tuturor cationilor din cele $G_i$ respectiv $G_s$ grame care s-au cîntărit. Și fie notată cu „tradiționalul" X concentrația care se cere „formulată".

Primul pas constă în aplicarea „banalei" reguli de trei: $\frac{G_{s+}}{M_{s+}}$ moli cation de bază corespund la $\frac{G_{i+}}{M_{i+}}$ moli cation impuritate; 100 moli cation de bază corespund la X moli cation impuritate, de unde o primă „față" pentru necunoscută:

(1) $$X = 100 \cdot \frac{G_{i+}}{G_{s+}} \cdot \frac{M_{s+}}{M_{i+}} \cdot M\%$$

O relație frumoasă dar care are numai mărimi inaccesibile cîntăririi. Deci să căutăm a scăpa de ele. Dar cum ? Pătrunzînd în „intimitatea" ionică a substanțelor cu care lucrăm, vă propun următorul sistem pe care nu veți avea curajul de a-l contesta, ci pe acela de a-l constata :

$$(2) \qquad \begin{cases} G_{i+} + G_{i-} = G_i \\ \dfrac{G_{i+}}{G_{i-}} = \dfrac{M_{i+}}{M_{i-}} \end{cases}$$

După acceptarea inevitabilă veți extrage din el

$$(3) \qquad G_{i+} = \frac{G_i \,.\, M_{i+}}{M_i} \text{ și absolut analog } G_{s+} = \frac{G_s \,.\, M_{s+}}{M_s}$$

Înlocuind pe (3) în (1), se obține

$$(4) \qquad X = 100 \cdot \frac{G_i}{G_s} \cdot \frac{M_s}{M_i}$$

relație care folosește mărimile „balanțate" $G_i$ și $G_s$ precum și mărimile „tabelate" $M_i$ și $M_s$. Cîntărind bine rezultatele, putem spune că aceasta este relația pe care o cere problema.

Dacă dispuneți de timp, vă puteți convinge personal și „creional" că prin același raționament se demonstrează valabilitatea acestei formule și pentru cazul cationilor impurificatori de valență mai mare decît 1.

18) V-am promis probleme deosebite provenind de la autori foarte vandabili ? Cîți dintre d-voastră n-ar da năvală să cumpere *Elementele* lui Euclid — din care s-a extras problema în speță — dacă s-ar reedita ?

Despre problema aceasta, Charles W. Trigg din a cărui culegere am... cules-o, spune : „deși bine cunoscută, această frumoasă demonstrație clasică merită să fie inclusă în orice culegere de soluții cu veleități de eleganță". Așa stînd lucrurile, chiar dacă culegerea mea nu este deosebit de elegantă, n-am decît de cîștigat din reproducerea acestei probleme pe care iată cum a raționat-o o minte fundamentală de acum 2000 de ani.

Să presupunem, prin absurd, că există cel mai mare număr prim și să-l notăm cu $p$. Să considerăm numărul mai mare cu o unitate decît produsul tuturor numerelor prime mai mici sau egale cu $p$, deci

$$Q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots p + 1$$

$Q$ nu este divizibil cu nici unul din numerele prime din produs — o primă observație de primă importanță. Într-adevăr bazați pe ea

putem să afirmăm despre $Q$ ori că este prim, ori că este un produs de numere prime mai mari decît $p$. În primul caz însuși $Q$, care-i prim, este mai mare decît $p$. În cel de-al doilea caz $Q$ nu mai este prim dar trebuie să acceptăm că printre divizorii săi se găsesc numere prime mai mari decît $P$. În orice caz, există un număr prim mai mare decît $p$. Această ultimă propoziție este absolut echivalentă cu aceea că nu există cel mai mare număr prim. Şi totuși, pare greu de acceptat că poate exista un număr cu oricît de multe cifre vrem și care să nu se dividă prin niciunul din miliardele de miliarde de numere care îl preced... Asta este!

19) Mi s-a cerut pentru această miniculegere să caut probleme care să stimuleze cît mai mult imaginația cititorilor rezolvitori. Dacă pentru cele de pînă acum aș face-o cu o oarecare ezitare, pentru cea în speță aș pune dezinvolt mîna pe cele 100°C ale muchiei pătratului spre a susține că problema satisface doleanța editorului.

Problema a fost culeasă de același Ch. W. Trigg amintit cu „coordonatele" necesare, la problema 16.

Înainte de a trece la rezolvarea propriu-zisă, să ne amintim un important rezultat al legilor de propagare a căldurii: dacă temperatura pe frontiera unui corp omogen e constantă, ea are aceeași valoare constantă și în interiorul corpului.

Ca un prim pas al rezolvării, să suprapunem patru pătrate de tablă identice, astfel încît cîte o latură încălzită la 100°C să corespundă fiecăreia dintre laturile pătratului obținut în acest mod. Temperatura medie pe fiecare muchie a pătratului „gros" este tot de 25°. Ținînd seama de cele spuse mai sus cu privire la propagarea căldurii, înseamnă că temperatura din centrul pătratului este tot de 25°. Se observă însă că acest „25°" este de fapt media aritmetică a temperaturilor muchiilor, $\frac{25+25+25+25}{4}$, ceea ce ar trebui să fie valabil și în cazul unui singur pătrat din tablă unde în centru fiecare temperatură corsespunzînd unei laturi participă la media de acolo: $\frac{0+0+0+100}{4} = 25°$.

Această metodă de rezolvare, după cum observă „culegătorul" Ch. W. Trigg, poate fi generalizată în cazul unui poligon regulat cu $n$ laturi menținute respectiv la temperaturile $t_i$ grade, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$; în acest fel se demonstrează că temperatura în centrul poligonului este de $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t_i$ grade.

20) Aceasta este problema 110 din culegerea lui Ch. W. Trigg care-i dă o rezolvare aproape telegrafică. Mie însă mi se pare

că o asemenea problemă ar trebui rezolvată mai pe îndelete, spre a-l ajuta pe cititor să deprindă mai abitir tehnicile rezolvării considerată ca un proces de cercetare.

Astfel, vom spune mai întîi că la prima vedere unghiurile care intră în expresia de calculat sînt luate la întîmplare. Un bun rezolvitor însă nu se oprește decît cînd trebuie, la prima privire. În speță, la a doua el va observa că expresia poate fi rescrisă astfel:

$$\cos 5° + \cos (5° + 72°) + \cos (5° + 2 . 72°) + \cos (5° + 3 . 72°) +$$
$$+ \cos (5° + 4 . 72°)$$

ceea ce arată că nu avem de-a face cu valori întîmplătoare, ci cu termeni ai unei progresii aritmetice. Dacă în materie de unghiuri particulare, 5° care mai poate fi scris $\frac{2\pi}{72}$ nu ne spune mare lucru, în schimb 72° mai ales sub forma $\frac{2\pi}{5}$ ne spune că este vorba de unghiul la centru corespunzînd laturii pentagonului regulat. Sau, și mai bine pentru problema noastră, este vorba de unghiul exterior pentagonului care ca și-n cazul oricărui poligon regulat, este egal cu unghiul la centru corespunzînd unei laturi.

Prin urmare, cele cinci unghiuri din expresia de calculat nu sînt altceva decît unghiurile pe care le fac laturile unui pentagon regulat, cu o dreaptă care formează cu una din laturi un unghi de 5°. Cu alte cuvinte, avem situația din figura alăturată (72) care ne amintește de problema 27 din *Peripeții*. De acolo știm că dacă considerăm laturile unui poligon ca vectori, suma proiecțiilor acestor vectori pe orice dreaptă din același plan este egală cu zero. Și cum termenii expresiei de calculat sînt chiar astfel de proiecții, rezultă:

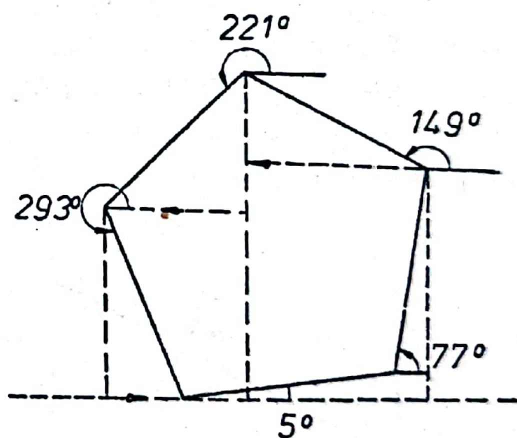


Fig. 72

$$\cos 5° + \cos 77° + \cos 149° + \cos 221° + \cos 293° = 0$$

21) Se poate formula tot fizic și partea a doua a acestei probleme: dispun de rezistențe cu tot felul de valori, dar numai întregi și prin legarea a două dintre ele în paralel trebuie să obțin o anumită rezistență echivalentă, măsurînd tot un număr întreg.

de ohmi ; ce rezistențe aleg din mulțimea de rezistențe disponibile? Iată un moment în care fizica trebuie să se folosească de matematică, moment în care formula $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ devine ecuația $\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ pe care o rezolvăm în numere întregi.

Fiindcă $x$, $y$, $z$ sînt pozitive, neapărat $x > z$ și $y > z$. Putem deci nota $x = z + u$, $y = z + v$ cu $u$, $v > 0$ evident. Cu aceste notații ecuația $\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ devine $z^2 = u\,v$, care prompt ne dă mijlocul de rezolvare : pentru orice $z$ este necesar doar să descompunem pe $z^2$ în toate modurile posibile, în produs de două numere întregi și pozitive $u$ și $v$.

Cine știe dacă în activitatea dv. viitoare nu veți avea nevoie atît ca fizicieni, cît și ca algebriști de o astfel de rezolvare, așa că notați-o ca atare.

2) Nu știți ce-i aceea „secțiune de aur" ? Este împărțirea în medie și extremă rație". Dar ce este „împărțirea în medie și extremă rație " ? Este „secțiunea de aur" ș.a.m.d. Despre această „bogată" secțiune s-a scris și bogat și frumos de către mulți. De aceea eu doar voi reaminti ce-i cu secțiunea (despre „aur" puteți găsi lămuriri în excelente cărți de tratare captivantă a matematicii, cum ar fi acelea scrise de Florica T. Câmpan, Viorel Gh. Vodă...)

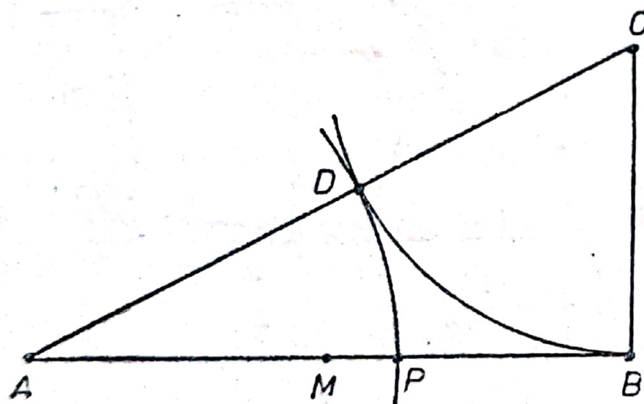


Fig. 73

Împărțirea în medie și extremă rație nu este altceva decît găsirea pe segmentul respectiv a unui punct „capabil" să-l despice în două sub-segmente, avînd următoarea proprietate, în aparență „nevinovată" : cel mai mare este medie geometrică între celălalt și segmentul-mumă.

În cărți mai vechi de geometrie (ca de pildă „Manualul pentru clasele a VIII-a și a IX-a" din 1953) am dat peste următoarea „tehnologie" de găsire a unui asemenea punct care realizează cea mai armonioasă dintre împărțirile la care poate fi supus un segment.

Se ia segmentul $AB$ (fig. 73) și :

1) cu rigla și compasul se găsește mijlocul $M$ al acestui segment;

2) în $B$ se duce, tot cu „comparigla", o perpendiculară pe $AB$ pe care se ia $BC = BM$

3) cu compasul în $C$ și cu raza $CB$ se intersectează segmentul $AC$ în punctul $D$;

4) Cu piciorul compasului în $A$ și cu raza $AD$ se determină pe $AB$ punctul $P$ care realizează „secțiunea de aur";

5) verificați dv. că punctul precedent este în raporturi bune cu adevărul.

Este clar ce avem de făcut din acest moment: de repetat construcția de mai sus dar ținîndu-ne tot timpul cît mai departe de riglă. Și astfel:

1) Pe $M$ îl aflăm numai cu compasul, știm cum ($AB$ fiind dat, adică trasat, ultima operație compas(ională) de la problema 13 din *Peripeții* nici nu mai trebuie executată);

2) La acest punct, în care trebuie să-l ridicăm pe $BC$ numai cu compasul, cine credeți că ne vine în ajutor? Incredibil dar adevărat: însuși Napoleon (? !)

Dar, nu-i deloc de mirare, căci Viorel Gh. Vodă ne-a arătat în *Vraja* sa cît de bun geometru era strategul „cel mai mare dintre cei mai mari", iar V. Bobancu în al său *Caleidoscop matematic*, (Editura Albatros, 1979), la capitolul „Probleme elementare din operele unor personalități" ne dă rezolvarea problemei 17, propusă de Napoleon: să se împartă în patru părți egale un cerc al cărui centru este marcat, folosind numai compasul.

Vă închipuiți ce emoționat, dar mai ales ce încurajat am fost să persist în a rezolva problema numai cu compasul, dacă însuși Napoleon-prim a fost preocupat de așa-ceva.

Voi reproduce în întregime rezolvarea pe care am găsit-o în lucrarea amintită, nu numai pentru că este dată de omul despre care s-a scris cel mai mult, ci și pentru că este frumoasă în sine. Așadar, în figura 74 se pune în evidență, prin metoda prea bine cunoscută, latura triunghiului echilateral în cercul dat $O$. Aceasta este $AB$. Fie $C$ punctul diametral opus lui $A$. Din extremitățile diametrului $AC$ drept centre, se trasează cercuri cu raza $AB$; fie $D$ unul dintre punctele lor de intersecție. Segmentul $DO$ este latura pătratului înscris în cercul dat, cum rezultă din triunghiul $AOD$, dreptunghic

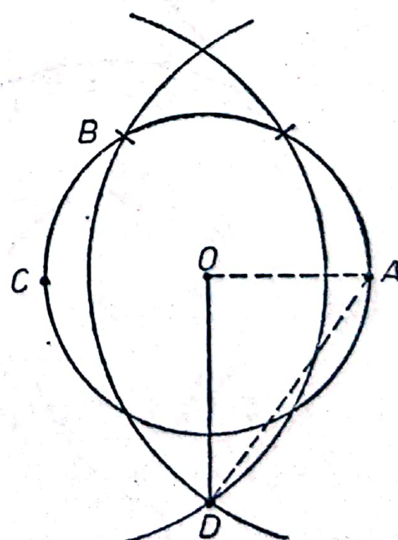


Fig. 74

în $O$ (căci coarda comună celor două cercuri trasate este perpendiculară pe linia centrelor lor), la care ipotenuza $AD$ este latura triunghiului echilateral. Avînd latura pătratului înscris în cerc, nu ne rămîne decît s-o luăm în compas și s-o purtăm pe circumferință începînd din $A$, de pildă. Este limpede acum cum putem să-l „clădim“ pe $BC$ (în figura 73) numai cu compasul, folosindu-ne de cercul $(B, BM)$ ;

3) În scopul găsirii punctului $D$ se duce cercul cu centrul în $C$ și de aceeași rază $BC = BM$ ;

4) Dacă aș cunoaște o metodă pentru a construi, numai cu compasul, un cerc cu centrul într-un punct $A$ exterior unui alt cerc și tangent acestui cerc și dacă aș putea aprecia exact punctul de tangență. l-aș putea găsi pe $D$ doar cu compasul. Dar cum nu știu de existența unei asemenea metode, sînt nevoit, pentru găsirea lui $D$, să folosesc PENTRU PRIMA ȘI ULTIMA OARĂ, rigla ;

5) Obținerea lui $P$ este acum cea mai simplă operație instrumentală din geometrie : cu centrul în $A$ și cu raza $AD$ se practică în $AB$ tăietura de aur...

În încheiere poate că ar trebui să reunim cele două figuri din problemă pentru a ilustra toate operațiile care au fost cît pe-aci să ne ducă la o problemă celebră (noroc cu punctul $D$ care poate tocmai fiindcă este... inițiala cuvîntului „dreaptă“, a ținut să-și facă apariția pe o riglă). Într-adevăr, figura 75 este interesantă atît „ca fizic“ (se apropie de ciorchinele de la problema 14-peripeții) cît și „ca psihic“ (reunește două spirite celebre : cel al epocii de aur a Eladei și cel matematico-napoleonian).

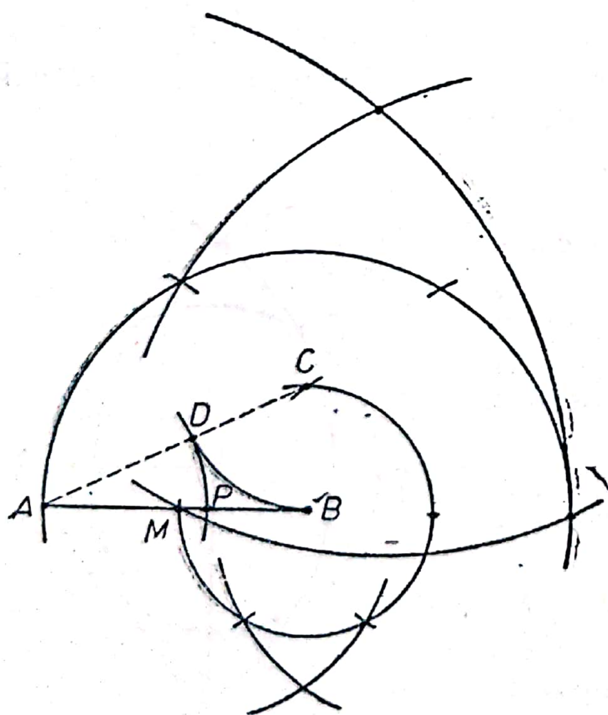


Fig. 75

23) Deoarece a doua ecuație mă deranjează semănînd prea tare cu una algebrică, o supun acțiunii necruțătoare a unui sinus „total“. Ca urmare,

$$(1) \quad \sin(\alpha + \beta + \gamma) = 1$$

care ținînd seama de $\sin(\beta + \gamma) = \cos \alpha$ (ecuația doua), devine

(2) $$\sin\alpha \cdot \cos(\beta + \gamma) + \cos^2\alpha = 1$$

Iată o relație aflată la răscruce de drumuri matematice, adică acolo unde trebuie să te afli „mai cu ochii în patru“ decît oriunde ca să deosebești amicul de inamic. Într-adevăr dacă nu sîntem atenți, îl înlocuim și pe cos $(\beta + \gamma)$ cu egalul său, sin $\alpha$, și obținem relația $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, evident mai mult banală decît fundamentală, în cazul nostru. În schimb dacă pe același cos $(\beta + \gamma)$ îl dezvoltăm, căpătăm :

(3) $$\sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma - \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma + \cos^2\alpha = 1$$

Ținînd seama de prima ecuație a sistemului și transformînd $\cos\beta \,.\, \cos\gamma$ în sumă, se ajunge la o relație „prietenească“ :

(4) $$\sin^2\alpha - \sin\alpha \,.\, \cos(\beta - \gamma) + \frac{1}{4} = 0$$

în care distingem pe loc o ecuație de gradul 2 în sin $\alpha$. Nu numai sub puterea obișnuinței, vom „rezolva“ această ecuație, conform mult prea celebrei formule, și vom obține :

(5) $$\sin\alpha = \frac{\cos(\beta - \gamma) \pm \sqrt{\cos^2 - \beta - \gamma) - 1}}{2}$$

Veți vedea că această relație este o adevărată criptografie trigonometrică. Iată ce se poate descifra în cele 23 de semne matematice ale ei :

1) volens-nolens, $\cos^2(\beta - \gamma)$ trebuie să fie egal cu unitatea, altfel situația devine complexă atît la propriu cît și la figurat...

2) $$\cos^2(\beta - \gamma) = 1 \rightarrow \cos(\beta - \gamma) = 1 \rightarrow \beta = \gamma\,;$$

3) $$\cos(\beta - \gamma) = 1 \rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}\,;$$

4) $$\alpha = \frac{\pi}{6} \rightarrow \beta + \gamma = \frac{\pi}{3} \rightarrow \beta = \gamma = \frac{\pi}{6}\,;$$

5) cea de-a treia ecuație a sistemului trigonometric dat ar putea fi $\alpha = \beta$.

Așadar, sistemul de completat... completat va arăta astfel : $\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma = 1/8$ ; $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$; $\alpha = \beta$, în care ecuația căutată este de fapt superfluă (ceea ce face ca problema să pară redactată într-o zi de... 1 aprilie).

24) Cu toată frica noastră pentru momentul căderii, îl fotografiem în figura 76 în care bara $AB$ (nici o legătură cu „datul în bară“ !) reprezintă sistemul mecanic om-bicicletă. Ambițiosul biciclist avînd nevoie de o rază a virajului cît mai apropiată de... zero, s-a înclinat — musai — cu un unghi $\alpha$ „mititel“. Acesta și-a atins minimul în figura noastră care surprinde momentul formării unui cuplu de forțe de către forțele de frecare și centrifugă. Dar acest moment înseamnă pur și simplu derapare datorită faptului că forța centrifugă tinde să imprime sistemului om-bicicletă, aplecat forțat, o mișcare de translație. Fizic aceasta înseamnă egalitatea valorilor numerice ale celor două forțe iar matematic prima relație a acestei soluții :

(1) $$\mu m g = \frac{mv^2}{r}$$

Dar, pentru ca „dezastrul“ să fie complet, s-a impus și o condiție de răsturnare, „subînțeleasă“ de figura noastră : egalitatea momentului cuplului de forțe amintit cu cel al cuplului format de greutate ($G$) și de reacția solului în punctul de sprijin ($N$). Deci

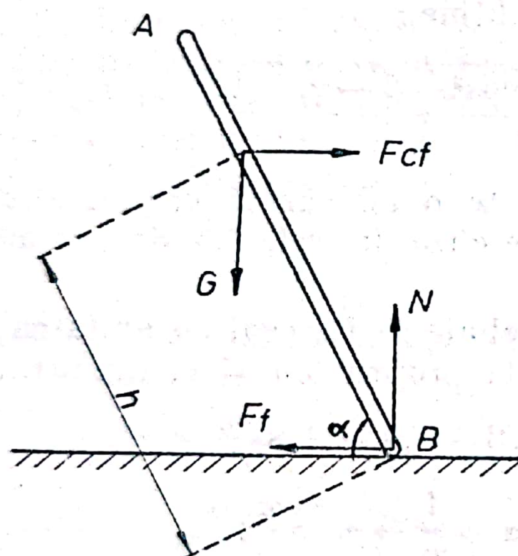


Fig. 76

(2) $$Gh \cos \alpha = \frac{mv^2}{r} h \sin \alpha$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă, mai rapid chiar decît căderea biciclistului, valoarea lui $\alpha$ (nici o legătură cu citirea inversă a lui „alfa)“ :

(3) $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\mu}$$

Dacă la $\alpha$ s-a ajuns pe un drum relativ drept, la $r_v$ (raza virajului buclucaș) se ajunge pe un drum mai... aplecat, la propriu ca și la figurat. Știe și cimpanzeul, ba chiar și ursul de la circ care de asemenea merge cu bicicleta, că atunci cînd ia o curbă trebuie să se aplece spre centrul acesteia spre a nu ajunge în brațele vreunui spectator hipertensiv... Tot astfel și biciclistul nostru mult mai ambițios și mai „vitezos“. Dar aplecîndu-se, sistemul om-bicicletă își micșorează energia potențială astfel că pentru a fi satisfăcută neînduplecata lege a conservării energiei, va crește corespunzător energia cinetică și implicit viteza liniară pe curbă, $v'$. Nu vă cere

prea multă energie, nici mintală, nici manuală, ca să scrieți valoarea literală a acestei viteze :

(4) $$v' = \sqrt{v^2 + 2gh(1 - \sin\alpha)}$$

La ce bună ?

Vă permite ca folosindu-vă de relațiile (1) și (3) să aflați

(5) $$r_v = \frac{1}{\mu g}\left\{v^2 + 2gh\left[1 - \sin\left(\text{arc tg}\frac{1}{\mu}\right)\right]\right\}$$

25) Trebuie să declarăm întîi și-ntîi că problema fiind de la „Kant citire", sigur nu-i de ici de colea, ba chiar că ne lipsea o asemenea celebră problemă de „perspicacitate aplicată". În al doilea rînd, dacă datele ei sînt realmente... reale, avem tot dreptul să ne mirăm din răsputeri aflînd că lui Kant — cel mai punctual om consemnat de istorie — a putut să i se întîmple așa ceva. Fără să ne mai punem întrebări (ca de pildă ce o fi pățit servitorul care a uitat să întoarcă ceasul...), ne smulgem din mirarea ce ne-a cuprins atît de „Kantitativ" ca să urmărim cum se descurcă în situația descrisă un *Om* care *Gîndește*. Iată gama celor șapte operații executate :

1) Înainte de a pleca de-acasă, Kant a pornit ceasul și a notat indicația acestuia, așa inexactă cum era ;

2) A mers, la ducere, cu celebrul său pas regulat ca un tic-tac ;

3) Ajuns la amic, primul lucru „nemecanic" efectuat a fost citirea orei exacte de pe ceasul acestuia (amicul dispunînd de un servitor mai grijuliu în ziua aceea) ;

4) La plecarea de la amic, cu ajutorul aceluiași ceas „amical", a evaluat timpul petrecut la acesta, notîndu-și totodată ora plecării ;

5) A mers la întoarcere cu același pas — nu ne îndoim cîtuși de puțin — ca la ducere ;

6) Ajuns acasă, cu ajutorul ceasului său „aflat" pe alt meridian, a evaluat timpul cît a lipsit din locuința personală, notînd totodată indicația ;

7) A evaluat timpul mersului într-unul din sensuri și l-a adăugat orei exacte citite în momentul plecării de la amic...

Ca-ntr-o „kantată" !

26) Nu puteam lăsa această culegere, oricît de mică ar fi ea, fără sarea și piperul problemelor din amintita culegere a lui A. Hristev și a celorlalți. Mai ales că problemele respective, nu sînt decît „răspunse" nu și rezolvate acolo.

Problema în speță m-a atras prin jerba ei de bile „atît de ideal" aruncate în toate direcțiile posibile.

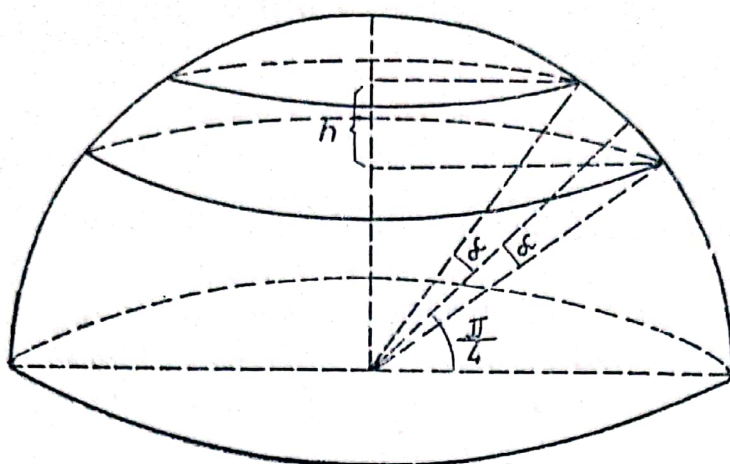



Fig. 77

După ce ne-am ferit cu grijă să nu ne cadă vreo bilă în cap, să vedem ce raționament a folosit cercetătorul fizician Frunză Ștefan spre a rezolva această problemă cu care a răspuns cererii mele de material stimulativ pentru imaginație. El a considerat o semisferă de rază arbitrară $R$, avînd drept centru chiar punctul din care sînt aruncate bilele. Ca măsură a „simetriei aruncării" a considerat uniformitatea distribuirii pe semisferă a punctelor rezultînd din intersecția acesteia cu tangentele la traiectorii în punctul inițial. Densitatea de puncte pe această suprafață va fi $\rho = \frac{N}{2\pi R^2}$ (fig. 77)

Privind figura 77 cu atenție, înțelegem în ce constă problema dacă ne amintim ceva de la studiul mișcării unui obiect aruncat pe o direcție care face un unghi cu orizontala : distanța maximă la care acesta va cădea corespunde unghiului de 45°, alias $\frac{\pi}{4}$ (o știu și mai bine, încă, tunarii pe care, ca și pe tutunari, îi dorim cît mai repede trecuți în rîndul oamenilor pașnici...). Problema constă deci în a determina unghiul $\alpha$ astfel încît zona sferică determinată de cercurile corespunzînd unghiurilor $\frac{\pi}{4} - \alpha$ și $\frac{\pi}{4} + \alpha$, să conțină $(1 - f) \cdot N$ puncte.

Înălțimea segmentului sferic corespunzînd zonei sferice aflată în... zona noastră de interes, este

$$h = R \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - R \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \ldots = R\sqrt{2} \sin \alpha$$

cu ajutorul căreia aria zonei sferice ciuruite de cele $(1-f)\cdot N$ bile, se scrie:

$$S = 2\pi Rh = 2\pi R^2\sqrt{2}\sin\alpha.$$

Înlocuind această valoare în „premisa" $\rho S = (1-f)\,.\,N$ se obține ecuația

$$\sin\alpha = \frac{1-f}{\sqrt{2}}.$$

Acum este momentul să vă reamintesc „bătaia maximă" dată de

$$b = \frac{v_0^2}{g}\cdot\sin 2\alpha_0 \text{ pentru } \alpha_0 = \frac{\pi}{4}$$

Pe noi însă ne interesează $b$-ul maxim pentru bilele aflate în cercul cerut de problemă și care corespunde valorii „nehotărîte" $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}\pm\alpha$. Să-i zicem

$$b_f = \frac{v_0^2}{g}\cdot\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\pm\alpha\right) = \frac{v_0^2}{g}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm 2\alpha\right) = \frac{v_0^2}{g}\cdot\cos 2\alpha =$$

$$= \frac{v_0^2}{g}\cdot(1-2\sin^2\alpha)$$

Profitînd de faptul că l-am calculat mai sus pe $\sin\alpha$, se capătă

$$b_f = \frac{v_0^2}{g}\cdot[1-(1-f)^2]$$

căreia, dacă vreți, puteți să-i faceți proba.

27) Cititorul a înțeles la timp că fiind vorba de rotații care duc punctele rețelei în poziții identice cu cea inițială, avem de-a face cu o rețea înzestrată cu „direcții de puncte" (care pot fi axe de rotație) perpendiculare pe „plane de puncte". De asemenea, a înțeles din translatarea „paralelogramului elementar" că se poate vorbi de periodicitate în așezarea punctelor „nodale" pe cele trei direcții necoplanare și că perioadele respective sînt egale cu lungimile muchiilor paralelipipedului „originar".

Să considerăm o axă de rotație, $\Delta_1$, ce trece printr-un punct $A$ al rețelei geometrice (fig. 78). Fie apoi un nod vecin lui $A$, să-l notăm $B$. Efectuînd operația simetrică de rotație în jurul lui $\Delta_1$ (care în figură este perpendiculară pe planul $\pi$, planul hîrtiei),

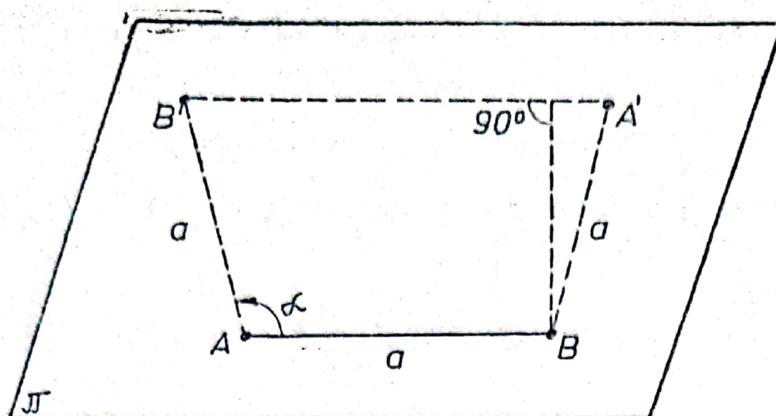



Fig. 78

„nodul" $B$ se va muta în altul $B'$, aparţinînd de asemenea reţelei geometrice. Planul care conţine cele trei puncte necoliniare, $A$, $B$, $B'$ este — v-am atenţionat mai sus — tot un plan al reţelei. Problema ne cere să arătăm că unghiurile de rotaţie ce caracterizează operaţiile simetrice pot avea numai anumite valori bine determinate. Punctele $A$ şi $B$ sînt identice ca „noduri" ale reţelei geometrice, ceea ce înseamnă că toate proprietăţile geometrice ale „nodului" $A$ vor fi regăsite în $B$. De pildă, dacă prin $A$ trece o axă de rotaţie căreia îi este asociată o operaţie simetrică de rotaţie cu un unghi $\alpha$, şi prin $B$ va trece o asemenea axă, $\Delta_2$. Rotaţia reţelei geometrice în jurul lui $\Delta_2$ duce pe $A$ în $A'$. Punctele „nodale" $A$, $B$. $A'$, $B'$ sînt conţinute în planul reţelei, $\pi$, normal axelor de rotaţie $\Delta_1$ şi $\Delta_2$.

Prin construcţie dreapta $B'A'$ este paralelă cu $AB$, aparţine deci unei aceleiaşi familii de drepte. Este uşor de înţeles că a face parte din aceeaşi familie, pentru nişte drepte înseamnă să aibă aceeaşi perioadă. Cum $A$ şi $B$ sînt puncte vecine ale reţelei, distanţa dintre ele este chiar perioada direcţiei $AB$ şi deci şi a lui $A'B'$, adică $A'B' = n \cdot a$, unde $n$ este număr întreg.

Din figură se observă că

$$A'B' = a + 2a \, . \cos (\pi - \alpha) = na$$

de unde

$$\cos \alpha = \frac{1 - n}{2}$$

care impune pentru n doar valorile 0, 1, 2, 3 ( e cineva care nu ştie de ce ?). Rezultă valorile posibile pentru $\alpha : 60°(n = 0)$; $90°(n = 1)$; $120° \, (n = 2)$; $180°(n = 3)$ Aceste valori, deduse pentru reţeaua geometrică, se regăsesc la cristale...

28) S-ar zice că slăbiciunea mea pentru bile e foarte... grasă. De data aceasta se agaţă de nişte bile suspendate, în cadrul une

probleme cu ... suspense (dacă ne gîndim cum sînt suspendate și mai ales cum trebuie „pîndite" imediat după „eliberare" ...)

Deci, ce se petrece cu bilele imediat după ce i se dă drumul celei de masă $m_1$ ? Greu de răspuns imediat deși privind figura 79 lucrurile promit să fie mai simple la început decît în momentele următoare (cînd se întrevede o adevărată „zbatere" de care mai că-ți vine să te ferești ca de arma cu bile...). În chiar momentul desprinderii, se poate scrie vectorial „despre" bila $m_1$ :

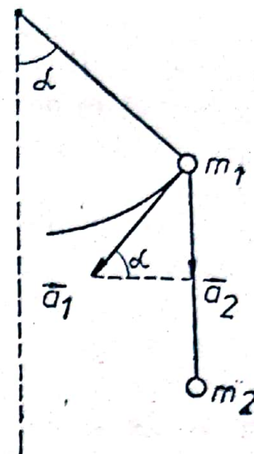


Fig. 79

(1) $$\vec{T}_1 + \vec{G}_1 + \vec{T}_2 = m_1\vec{a}_1$$

iar „despre" bila $m_2$, cu același principiu II al mecanicii

(2) $$\vec{T}_2 + \vec{G}_2 = m_2\vec{a}_2$$

Faptul că $\vec{a}_1$ este orientat după tangenta la cercul descris de bila 1, în punctul în care se află aceasta cînd încetează acțiunea „susținătoare", ne sugerează „proeictarea ecuației" (1) pe această tangentă (unde mai pui că astfel scăpăm și de $T_1$) :

(3) $$(G_1 + T_2) \sin \alpha = m_1a_1$$

Cum în momentul „lăsării bilelor în libertate" $\vec{a}_2$ este orientat pe verticală, ecuația (2) se va „proiecta" pe aceasta :

(4) $$G_2 - T_2 = m_2a_2$$

(unde se observă că am adoptat ca sens pozitiv sensul de la... cer la pămînt).

Ultimele două ecuații, scalare, formează un sistem cu mai multe necunoscute dar care devine solubil în $a_2$ dacă se găsește o relație „comodă" între $a_1$ și $a_2$. Pentru găsirea acestei relații fie următorul raționament pe muchie de... sferă. Într-un timp „imediat de scurt" după tăierea firului (invizibil în figură) care susține duo-ul de bile în poziția inițială, se poate considera că : $m_1$ cade pe tangenta amintită pe o distanță $x_1$ : $m_2$ cade pe verticală pe distanța $x_2$ ; cele două bile cad totuși simultan (sînt totuși legate...). Pornind de la aceste premize putem crede în următoarea imagine a „căderii" bilelor : bila $m_1$ cade evident simultan cu proiecția sa pe verticală, proiecție care, la rîndul ei, urmează fidel bila $m_2$ (despre care știm că o pornește tot pe verticală).

Concluzia, în termeni geometrici, va fi aceasta : deplasarea de pe verticală, $x_2$, este proiecţia pe „aceeaşi" verticală a deplasării $x_1$ de pe tangentă (muchia de... sferă), adică $x_1 \sin \alpha$ Prin urmare :

$$(5)\qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{\frac{1}{2}a_2t^2}{\frac{1}{2}a_1t^2} = \frac{a_2}{a_1} = \sin \alpha$$

de unde $a_1 = \frac{a_2}{\sin \alpha}$, relaţia „comodă" căutată. Ţinînd seama de această relaţie, sistemul amintit duce la răspunsul problemei identic cu cel din „A. Hristev et"

$$a_2 = g \sin^2 \alpha \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha}$$

29) Iată o problemă pe care aş considera-o printre campioanele celor ce-ţi dau, la prima vedere, impresia că nu sînt posibile. „Dacă îi luăm pe toţi necunoscuţi ?" zicea un cetăţean căruia i-am enunţat-o. „Dacă îi iau pe toţi cunoscuţi între ei ?" zicea un elev nu prea săritor în „ajutorul" rezolvării unor asemenea probleme.

Întrebările reproduse mai sus au şi rezolvat cele două cazuri particulare indubitabile ale problemei (în primul nu se cunosc între ei $C_6^3$ grupuri de cîte trei persoane, iar în al doilea tot atîtea triouri se cunosc). La baza raţionamentului pentru cazul general stă fireasca reciprocitate a relaţiei de cunoaştere sau necunoaştere dintre doi oameni. Pornind de aici W. Trigg găseşte o soluţie care se potriveşte grozav cu titlul culegerii sale.

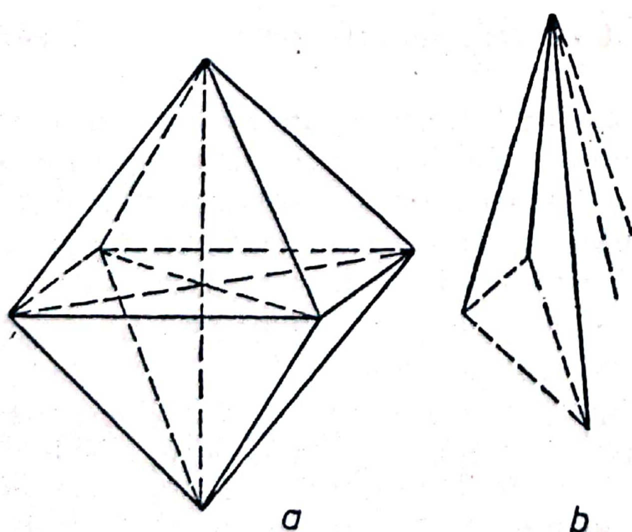


Fig. 80

Sus-amintitul autor sesizează posibilitatea de a face să le corespundă celor 6 „implicaţi" vîrfurile unui... octaedru (şi iată cum 6 persoane oarecare pot deveni vîrfuri...). Ducînd cele trei diagonale ale acestuia (fig. 80 a) se realizează legături liniare de tipul „fiecare cu oricare", între vîrfuri (din fiecare vîrf pornesc cîte

5 astfel de drepte care-l pun în „relație“ cu fiecare dintre celelalte vîrfuri). Din acest moment, Ch. W. Trigg face cel de-al doilea pas ingenios și surprinzător : pune semnul echivalenței între dreapta care unește două vîrfuri ale octaedrului (pe care la primul pas le echivalase cu persoane) și relația de cunoaștere sau necunoaștere dintre persoanele „reprezentate“ de cele două vîrfuri. Mergînd mai departe la fel de ingenios, atribuie o culoare (să-i zicem roșu) relației de cunoaștere și o alta (să-i zicem verde) relației de necunoaștere. Obține astfel următoarea problemă echivalentă cu problema inițială : dacă muchiile și diagonalele octaedrului se colorează în roșu sau verde (absolut la întîmplare — aș adăuga eu), atunci cel puțin un triunghi format din aceste segmente are toate laturile de aceeași culoare. Ce interesant !

Am amintit deja că orice vîrf este unit cu toate celelalte. Dintre cele cinci segmente care pornesc dintr-un vîrf există — musai — trei de aceeași culoare. Dacă extremitățile oricăror două segmente dintre acestea sînt unite printr-o linie de aceeași culoare ca a lor, problema e rezolvată căci ne aflăm în prezența unui triunghi „roșu“ sau „verde“, care știm ce reprezintă. Dar să presupunem că aceleași extremități considerate mai sus sînt unite printr-o linie de cealaltă culoare (fig. 80, b). Ele vor trebui unite prin aceeași culoare cu cea de-a treia extremitate ca să nu cădem pe cazul precedent. Or, asta înseamnă că înseși segmentele unind cele trei extremități considerate formează un triunghi cu toate laturile de culoarea „cealaltă“ (care iarăși poate fi roșu sau verde). Și astfel am stabilit o interesantă proprietate a oricărui grup de șase indivizi umani. D-ale octaedrului !

30) „Nu știu cum sînt alții, dar eu cînd mă gîndesc la“ numerele prime parcă aș avea de-a face cu o elită a numerelor, de o măreție aparte pe care o pot gîndi numai. Îmi zic că nu degeaba li s-a zis „prime“ și au dat matematicienilor preocupări de prim rang sau de prim-plan. De aceea, multe probleme privitoare la aceste numere m-au atras, fascinîndu-mă chiar, nu de puține ori. Așa s-au petrecut lucrurile și cu problema aflată sub... creion.

Fie $a$, $a + d$, $a + 2d$, ..., $a + (n - 1)\,d$ cele $n$ numere prime în progresie aritmetică și $p$ un număr prim satisfăcînd inegalitatea $p < n$. Prin împărțirea la $p$ a acestor numere prime se vor obține, într-o anumită ordine, resturile 1, 2, ..., $p - 1$ dacă $a \neq p$ sau resturile 0, 1, 2, ..., $p - 1$ dacă $a = p$. Numărul numerelor prime din progresie fiind mai mare decît $p$, este în consecință mai mare decît numărul resturilor. Înseamnă că cel puțin două din ele, prin împărțirea la $p$ vor da același rest. Fie $a + jd$ și $a + kd$ aceste numere. Deci :

(1) $a + jd = q_1 p + r$, $a + kd = q_2 p + r$ cu $0 \leqslant j < k \leqslant p - 1$

de unde printr-o operație „secretă"

(2) $$(k - j)\, d = (q_2 - q_1)\, p$$

relație supraîncărcată de concluzii utile: $q_2 - q_1$ fiind întreg, rezultă că $p$ divide produsul $(k - j)\, d$; $k - j$ fiind mai mic decît $p$ n-are cum să fie divizat de acesta astfel că acest „necaz" cade numai pe capul lui $d$ (cum vrea problema).

O asemenea frumoasă problemă, veți fi de acord, merită o aplicație frumoasă. O găsim tot în *Probleme de aritmetică și teoria numerelor*, 1976, de I. Cucurezeanu, și sună așa: să se găsească o progresie aritmetică formată din 6 termeni, toți numere prime. Iată-ne deci pe punctul de a face rost de 6 „prime" în progresie... Deci să nu pierdem timpul!

Conform problemei de mai sus, rația progresiei trebuie să se dividă prin toate numerele prime mai mici decît 6, deci prin 2, 3, 5 adică trebuie să se dividă prin 30. Pentru aflarea primului termen al progresiei recurgem la încercări. În felul acesta se obțin de exemplu:

$$7,\ 37,\ 67,\ 97,\ 127,\ 157,$$

$$11,\ 71,\ 131,\ 191,\ 251,\ 311$$

$$23,\ 53,\ 83,\ 113,\ 143,\ 173$$

31) Se simțea parcă nevoia unei probleme de loc geometric în spațiu. Am ales pentru aceasta problema 59 din același „pescuitor de perle" care este Ch. W. Trigg. Am ales-o mai mult fiindcă rezolvitorul (de ce nu „rezolvatorul"?) a găsit o soluție foarte interesantă și care într-un fel amintește de problema 24 din *Peripeții*.

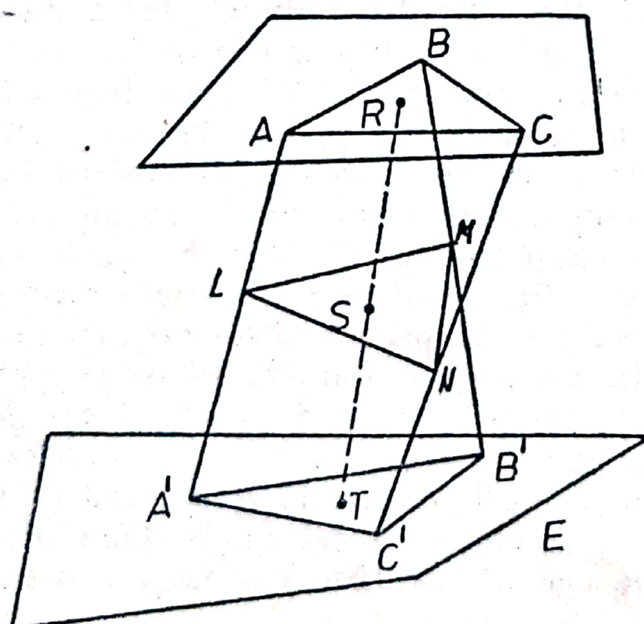


Fig. 81

În figura 81 să considerăm punctele $A$, $B$, $C$ și $A'$, $B'$, $C'$ ca puncte materiale avînd masa egală cu unitatea. Fie $R$ centrul de greutate al „particulelor" $A$, $B$, $C$ și $T$ centrul de greutate al „particulelor" $A'$, $B'$, $C'$. $R$ și $T$ vor fi la rîndul lor „particule" de masă 3, iar $L$, $M$, $N$ „particule" de masă 2. $S$ fiind centrul de greutate al „particulelor" L, M, N,

va avea masa 6. Deci este centrul de greutate al tuturor celor 6 puncte considerate și trebuie să se afle pe linia care unește pe $R$ cu $T$. Dar cum acestea au fiecare masa egală cu 3, iar $S$ are masa egală cu 6, rezultă că $S$ se găsește la mijlocul lui $RT$. Cum $R$ este fix și $T$ variabil rezultă că $S$ descrie „traiectorii" într-un plan paralel cu planul $E$. Acel plan este chiar locul geometric căutat.

32) Această problemă ar fi trebuit să facă parte din partea de „peripeții" a lucrării, într-atît de problematică i-a fost soluția. În cele din urmă a fost găsită de un grup de căutători printre care s-a aflat și subsemnatul. Deoarece am auzit că pentru mulți alții s-a dovedit chiar insurmontabilă, voi insista asupra soluției respective încă mai mult decît la celelalte.

Prima întrebare, nemarcată în enunț bineînțeles, este: ce caută această problemă, în cartea ce o găzduiește, la „impulsul mecanic"? Într-adevăr ești tentat să o rezolvi după schema clasică: mișcare uniform accelerată fără viteză inițială, pe planul înclinat, terminîndu-se la baza acestuia cu o viteză care va constitui viteză inițială pentru mișcarea uniform încetinită de pe planul orizontal. Mergînd însă pe-acest drum, rezultatul cel din carte, nu îl capeți nicidecum. Și-abia acum îți pui cea de-a doua întrebare: oare ce se întîmplă cu sacul nostru (care nu poate fi asemuit cu o sanie sau cu un cărucior etc., el avînd o formă și mai ales un conținut aparte) la baza planului înclinat, acolo unde de fapt totdeauna se petrece un impact cu porțiunea orizontală? De obicei acest impact nu se ia în considerație (vezi „problema lui Iliuță", adică problema 30 din *Peripeții*), ceea ce nu impietează asupra rezultatelor. Cu sacul însă, cum am mai spus, este altceva, fie chiar și numai fiindcă continuînd să neglijați impactul amintit nu veți obține rezultatul din carte...

Deci să vedem mai întîi ce fel de mișcare are sacul nostru pe planul înclinat. Firește că este vorba de o alunecare (o rostogolire ar face ca problema să... alunece spre alte date și raționamente). Aceasta se face pe o suprafață mare cu un $\mu$ (coeficient de frecare) mare și presupunînd o oarecare deformare a sacului în momentul așezării lui pe plan ca și în momentul atingerii planului orizontal. Această deformare nu este esențială pentru raționamen-

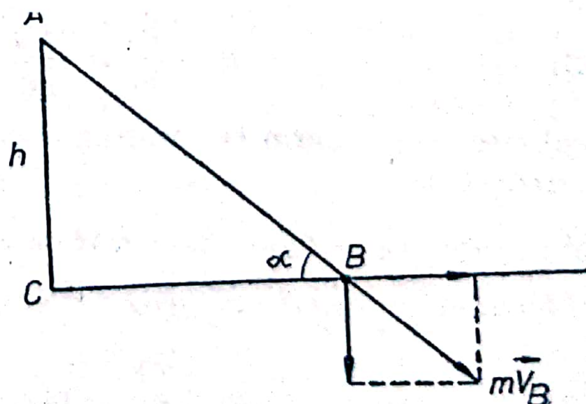


Fig. 82

tul nostru. Deci sacul va aluneca pe planul înclinat ca un corp rigid aflat în primul rînd sub acțiunea componentei paralele cu planul a greutății proprii și în al doilea rînd sub acțiunea forței de frecare. Pe baza figurii alăturate (82) și stabilind că accelerația sacului pe plan este $g$ (sin $\alpha - \mu$ cos $\alpha$), se găsește pentru viteza atinsă la baza planului (în B) următoarea notabilă valoare:

$$(1) \qquad v_B = \sqrt{2a\ AB} = \sqrt{2\mu gh\left(\frac{1}{\mu} - \operatorname{ctg}\ \alpha\right)}$$

Pînă aici lucrurile s-au desfășurat, ca să zic așa, clasic. E rîndul „neoclasicului" să intre în acțiune. Acesta va ține seama de impactul care are loc în $B$.

Din capul locului se observă (sau se simte) că din cauza impactului viteza dată de (1) nu va fi viteză inițială pentru mișcarea ce urmează, ea suferind o diminuare în momentul imediat următor ciocnirii sacului cu planul orizontal. Avem acum o adevărată problemă în problemă: determinarea adevăratei viteze inițiale pentru mișcarea uniform încetinită de pe porțiunea orizontală. Pentru a o rezolva va trebui să vedem ce se întîmplă în $B$ cu impulsul, forța, viteza într-un timp $\Delta t$ mult mai mic decît timpul care se mai scurge pînă la oprirea sacului. În acest timp impulsul mecanic al sacului se descompune așa cum arată figura 82, dînd pe orizontală viteza $v_B$ cos $\alpha$, iar pe verticală forța

$$(2) \qquad F_n = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv_B \sin\ \alpha}{\Delta t}$$

care va da o forță de frecare $F_f = \mu F_n$ și aceasta, la rîndul ei, diminua-va încă și mai mult componenta orizontală a vitezei (o primă diminuare a avut loc odată cu descompunerea vectorială din $B$). Să evaluăm deci cantitatea cu care se micșorează $v_B$ cos $\alpha$. Aceasta va avea forma $a\Delta t$ unde $a$ este accelerația corespunzătoare forței de frecare $F$ , adică

$$(3) \qquad a = \frac{F_f}{m} = \frac{\mu F_n}{m} = \frac{\mu v_B \sin \alpha}{\Delta t}$$

valoare care permite aflarea adevăratei viteze inițiale pentru „orizontală":

$$(4) \qquad v_0 = v_B \cos \alpha - a\Delta t = v_B \cos \alpha - \mu v_B \sin \alpha.$$

Înlocuind pe $v_B$ cu valoarea dată de (1) se obține în final

$$(5) \qquad v_0 = \sqrt{2\mu gh\left(\frac{1}{\mu} - \operatorname{ctg} \alpha\right)}(\cos\ \alpha - \mu\ \sin\ \alpha)$$

După bine-ştiuta formulă $d = \frac{v_0^2}{2a}$ care dă spaţiul străbătut în mişcarea uniform încetinită cu viteză iniţială, avem :

$$(6) \qquad d = \frac{1}{a}\mu g h\left(\frac{1}{\mu} - \text{ctg } \alpha\right)(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)^2.$$

Forţa care încetineşte mişcarea, adică forţa de frecare $F_F = \mu m g$ care acţionează după scurgerea lui $\Delta t$, ne dă $a = \mu g$ astfel că (6) devine :

$$(7) \qquad d = h\left(\frac{1}{\mu} - \text{ctg } \alpha\right)(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)^2 = 0{,}25 \text{ m}$$

unde am efectuat şi operaţia de înlocuire a diferitelor mărimi fizice cu valorile lor numerice. Coincidenţa cu rezultatul din carte m-a uns la inimă...

De o asemenea frumoasă problemă nu ne putem despărţi fără a-i prilejui şi ei o aplicaţie. Ne-o oferă chiar problema imediat următoare din notoria culegere, 1.5.75, care grăieşte astfel : un sac cu făină lunecă liber fără viteză iniţială, pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 60°$ ; planul înclinat continuă cu un plan orizontal unde coeficientul de frecare este $\mu = 0{,}70$ ; unde se va opri sacul ? Să încercăm s-o rezolvăm fără a ne lăsa derutaţi de faptul că nu se dă coeficientul de frecare pe planul înclinat. N-avem decît să luăm pentru acest coeficient ce valoare vrem, să-i zicem $\mu'$ şi vom avea plăcerea să descoperim o relaţie (5) cu doi coeficienţi de frecare :

$$v_0 = \sqrt{2\mu' g h\left(\frac{1}{\mu'} - \text{ctg } \alpha\right)}(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)$$

Dar asta nu-i nimic pe lîngă faptul că dacă se înlocuiesc diferitele mărimi fizice cu valorile numerice date de problemă, ultima paranteză se găseşte negativă $(1/2 - 0{,}7 \cdot \sqrt{3}/2 < 0)$ şi deci — rezultat total neaşteptat — şi viteza iniţială a mişcării pe orizontală este negativă. Adică este orientată spre stînga (fig. 82), ca şi cum de îndată ce atinge podeaua sacul ar vrea să intre în planul înclinat. Cum asemenea tendinţă nu i se poate materializa, sacul va rămîne ţintuit la baza planului. Aşa zic şi autorii culegerii...

33) Aţi înţeles desigur că este vorba de a rezolva o problemă cu ajutorul unei figuri în care, în sfîrşit, rigla nu mai are ce căuta (după încercările „nereuşite" de la problemele 3 şi 22).

Mai înainte de a purcede la rezolvare, cred că se cuvine a spune cîte ceva despre relaţia trigonometrică pe care vrem s-o

stabilim pe o cale atît de geometrică. În cartea sa *Din istoria cîtorva numere de seamă*, Florica T. Câmpan ne dezvăluie următorul fapt care atestă, după părerea mea, celebritatea respectivei relații : după ce în 1841 W. Rutherford (prin nu se spune ce mijloace) a calculat 152 zecimale exacte ale lui $\pi$, în 1853, *Z.* Dase a ajuns la... 440 zecimale exacte tocmai prin formula de care ne vom ocupa.

Cerința problemei ne spune că trebuie să găsim niște puncte care pot genera drepte, făcînd unghiuri pe placul nostru. Evident, unghiuri ale căror tangente să fie, respectiv, 1/2, 1/5, 1/8.

Fie *A* și *B* primele două puncte din cele 12 (fig. 83), de fapt singurele care pot fi „construite" și fără compas. Notăm și distanța dintre ele, *d*, căci ne va servi ca un „catalizator" în tratarea soluției problemei.

În continuare, să urmărim diversele puncte pe figura 83 și să arătăm cum le-a pus compasul pe fiecare la locul lui. Prin procedeul purtării razei de trei ori pe circumferință, punctele *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* se dispun, coliniar, astfel :

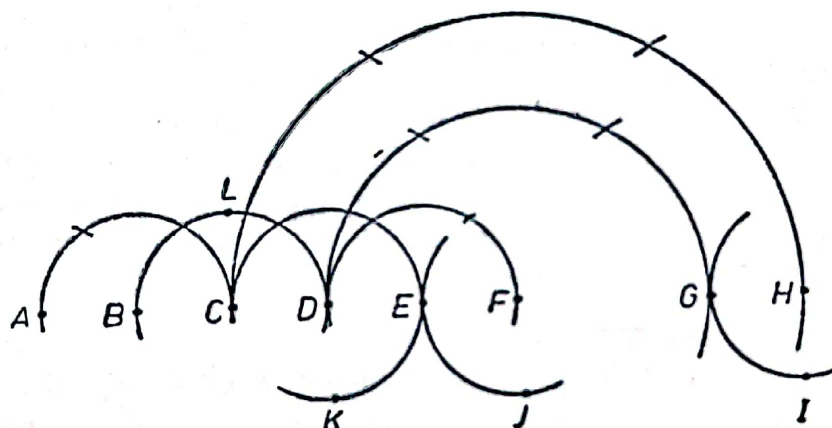



**Fig. 83**

— *C* : cu centrul în *B* și raza *BA* ;

— *D* : cu centrul în *C* și raza *CB* ;

— *E* : cu centrul în *D* și raza *DC* ;

— *F* : cu centrul în *E* și raza *ED* (toate razele de pînă acum au lungimea *d*) ;

— *G* : cu centrul în *F* și raza *FD* (rază avînd lungimea egală cu 2*d*) ;

— *H* : cu centrul tot în *F* dar cu raza *FC*.

Urmează seria punctelor *I*, *J*, *K*, *L* care se „plantează" folosind procedeul napoleonian descris la operația 2 de la problema 22 :

— *I* : cu ajutorul cercului de centru *H* și rază *HG* ; *HI* și *HG* congruente și perpendiculare ;

— $J$ : cu ajutorul cercului de centru $F$ şi rază $FE$ ; $FJ$ şi $FE$ congruente și perpendiculare;

— $K$ : cu ajutorul cercului de centru $D$ și rază $DE$ ; $DK$ și $DE$ congruente și perpendiculare;

— $L$ : cu ajutorul cercului de centru $C$ și rază $CD$ ; $CL$ și $CD$ congruente și perpendiculare.

Și-acum, doar închipuindu-ne diferitele drepte care se pot forma cu punctele astfel fixate, să căutăm unghiuri favorabile. Primul ni-l imaginăm pe $\widehat{LAC}$ care este... arcul a cărui tangentă e $\frac{1}{2}$. Al doilea ni-l imaginăm pe $\widehat{FAJ}$ a cărui tangentă este $\frac{1}{5}$, iar al treilea pe $\widehat{HAI}$ cu tangenta $\frac{1}{8}$. Prin urmare dacă am arăta că $m(\widehat{LAC}) + m(\widehat{FAJ}) + m(\widehat{HAI}) = \frac{\pi}{4}$, problema ar fi rezolvată. Să încercăm a vedea dacă-i adevărat. Pentru aceasta eu voi afirma iar dvs. veți demonstra :

— $L$, $A$, $K$ sînt vîrfuri de triunghi dreptunghic isoscel cu $m(\widehat{LAK}) = \pi/4$

— măsurile unghiurilor $\widehat{HAI}$ și $\widehat{JAK}$ sînt egale* (prin teorema cosinusurilor)

— $m(\widehat{LAK}) = m(\widehat{LAC}) + m(\widehat{HAI}) + m(\widehat{FAJ}) = \frac{\pi}{4}$ ceea ce echivalează cu relația de demonstrat.

---

* Aceste două demonstrații se bazează pe dispariția prin simplificare a „catalizatorului" $d$ din egalitățile $BC=CD=DE=EF=GH=HI=FJ=DK=CL=d$ și $FG=2d$. (n.a.)

## ANEXA III

### CONSTANTE ŞI DATE FIZICO-MATEMATICE REDATE MNEMOTEHNIC

1) *Constanta lui Planck*

Are valoarea $6{,}624 \cdot 10^{-27}$ erg.s. şi presupunînd că exponentul se memorează mai uşor, factorul zecimal poate fi scris în orice moment cu ajutorul frazei mnemotehnice :

GĂUTAM URMÎND UN PLAN

numărul literelor din cuvintele respective corespunzînd cifrelor lui 6,624 (notaţi şi suprapunerea plan-Planck)

2) *Numărul „e"*

Are valoarea 2,71828... şi, pînă la a 5-a zecimală inclusiv poate fi memorat prin fraza :

UN ÎNVĂŢAT A CONCEPUT UN COMPUTER

3) *Ordinea culorilor în spectrul vizibil*

Există culorile : roşu (R), portocaliu (P), galben (G), verde (V), albastru (A), indigo (I), violet (V). Iniţialele denumirilor lor se regăsesc în aceeaşi ordine la cuvintele din următoarea frază :

*R*AR *P*OŢI *G*ĂSI *V*ARA *A*COLO *I*ARBĂ *V*ERDE

4) *Constanta gazelor (R)*

Are valoarea $8{,}31436 \cdot 10^{7}$ erg/grad · mol şi factorul zecimal poate fi redat prin fraza :

ÎNVĂŢAŢI CUM E UŞOR SĂ-L REDAŢI

5) *Numărul „π"*

Întregul şi primele 20 de zecimale se „extrag" din fraza :

AŞA E UŞOR A SCRIE RENUMITUL ŞI UTILUL NUMĂR DIN MANUAL. EFECTUĂM ÎNCERCĂRI PRIVIND CELELALTE CĂI DE JOC SIMPATIC UTIL ŞCOLII.

## CUPRINS

Lector : G. FOLESCU
Tehnoredactor : GABRIELA ILIOPOLOS

*Bun de tipar 2.IV.1987. Apărut 1987.*
*Comanda nr. 2716. Coli de tipar 10,5*




Tiparul executat sub cd. nr. 397 la
Întreprinderea poligrafică Iași,
str. 7 Noiembrie nr. 49

Atît culegerea de „rezolvări cu probleme“, cît şi culegerea propriu-zisă care alcătuiesc lucrarea, prezintă rezolvări ale unor probleme de matematică şi fizică pentru liceu — multe originale —, într-o manieră care îşi propune să îmbine utilul cu amuzantul şi să acrediteze ideea că rezolvarea unor asemenea probleme este de fapt un proces de cercetare, adesea deosebit de captivant.

Lei 9,75